ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
III / 1981, s. 62–72*

Mieczysław LUBAŃSKI

ZAGADNIENIE ISTNIENIA TWIERDZEŃ O ISTNIENIU I NIEISTNIENIU, cz. I.

W rozważaniach o charakterze filozoficzno–światopoglądowym spotyka się stwierdzenia o charakterze dość ogólnym, stanowiące punkty wyjścia dla dalszego biegu myśli. Są one traktowane jako niepodważalne aksjomaty, aczkolwiek nie zawsze są poddawane krytycznej refleksji. Wśród nich występuje wypowiedź głosząca, że nie jest możliwe wykazywanie nieistnienia jakiegoś obiektu, można jedynie wykazywać, względnie dowodzić, jego istnienie. Innymi słowy przyjmuje się za słuszne stanowisko głoszące występowanie w wypowiedziach mających zwłaszcza walor światopoglądowy jedynie twierdzeń o istnieniu, a więc istnienie twierdzeń o istnieniu, nieistnienie zaś twierdzeń o nieistnieniu. Uważa się, że wspomniany punkt wyjścia nie budzi żadnych rozsądnych wątpliwości, jest niepodważalny.

Celem tego artykułu jest przeanalizowanie zasygnalizowanego zagadnienia na przykładzie zdań z zakresu matematyki. W dalszych częściach opracowania zajmiemy się powyższym zagadnieniem także w odniesieniu do nauk przyrodniczych, jak i społecznych. W przypadku matematyki, będącej najprostszą logicznie nauką[1], problem nas interesujący daje się stosunkowo łatwo przedstawić, a więc zarówno precyzyjnie wypowiedzieć, jak też zrozumiale wyrazić jego istotę oraz rozwiązanie.

1. Rozpoczniemy nasze rozważania od prostych przykładów wypowiedzi, które stwierdzają istnienie pewnych obiektów. Oto sformułowania zaczerpnięte z podręczników matematyki wyższej[2].

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Względnie jak inni wolą: językiem nauki, zwłaszcza fizyki.

[2]Zob. W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Warszawa–Wrocław 1946; W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, Warszawa 1968[4]; S. Balcerzyk, *Wstęp do algebry homologicznej*, Warszawa 1970; K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, Warszawa 1967[3]; H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1968.

(1) Istnieją liczby algebraiczne każdego naturalnego stopnia.

(2) istnieją liczby rzeczywiste, które nie są liczbami algebraicznymi.

(3) Istnieje kąt, który można zbudować za pomocą jedynie cyrkla i liniału, lecz którego nie można jedynie za pomocą cyrkla i liniału podzielić na 3 równe części.

(4) Dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba pierwsza od niej większa.

(5) Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i każdej liczby naturalnej m istnieje jeden i tylko jeden pierwiastek arytmetyczny stopnia m z liczby a.

(6) Dla każdego zbioru X istnieje (lewy) R–moduł wolny, którego bazą jest zbiór X.

(7) Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje takie c, że $a < c < b$ oraz $f'(c) = 0$.

(8) W każdym niepustym zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza.

W matematyce orzeka się więc o istnieniu pewnych obiektów i dowodzi ich istnienia. Innymi słowy w matematyce istnieją twierdzenia o istnieniu pewnych tworów matematycznych.

2. A teraz zanotujmy kilka przykładów wypowiedzi orzekających nieistnienie pewnych obiektów. Zostały one także zaczerpnięte z podręczników matematycznych[3].

(A) Nie istnieje ciąg nieskończony, który by zawierał każdą liczbę rzeczywistą.

(B) Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

(C) Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych.

(D) Jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 2, to równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z.

[3]Zob. W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, Warszawa 1968[4]; K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1977[7]; K. Borsuk, *Theory of retracts*, Warszawa 1967.

(E) Jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 1, to równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań w liczbach pierwszych x, y, z.

(F) Żadna liczba naturalna postaci $4k + 3$ nie jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

(G) Żaden ciąg nieskończony nie może mieć dwóch różnych granic.

(H) Brzeg kuli euklidesowej n–wymiarowej nie jest jej retraktem.

Podane przykłady upoważniają do stwierdzenia orzekającego, że w matematyce wypowiada się tezy o nieistnieniu pewnych obiektów, a także dowodzi się ich. Innymi słowy istnieją w matematyce twierdzenia o nieistnieniu pewnych tworów matematycznych.

3. Zaprezentowane przykłady stanowią wystarczającą przesłankę do poddania w wątpliwość zasygnalizowanego na początku artykułu ogólnego stwierdzenia głoszącego niemożliwość wykazywania nieistnienia pewnych obiektów. Nie może być słuszna teza w całej swej rozciągłości, skoro już w matematyce sytuacja przedstawia się inaczej, niż ona orzeka. Jeżeli wspomniana teza byłaby słuszna w zakresie problematyki o charakterze filozoficzno–światopoglądowym, to należałoby tego dowieść. I dopiero wówczas z niej korzystać.

4. Aczkolwiek problem sam w sobie rozważany na terenie matematyki przedstawia się jednoznacznie i znajduje tu łatwe rozwiązanie, to jednak inspiruje do dalszych, jak się zdaje, interesujących rozważań, którymi teraz się zajmiemy.

Zauważmy najpierw, że zarówno wśród wypowiedzi orzekających istnienie pewnego obiektu (nazwijmy je wypowiedziami „pozytywnymi”), jak też wypowiedzi o nieistnieniu jakiegoś obiektu (nazwijmy je wypowiedziami „negatywnymi”) dają się wyróżnić wypowiedzi o charakterze jawnym, jak też niejawnym. Do pierwszej grupy należą zdania (1)–(3) oraz (A)–(C), do drugiej natomiast stwierdzenia pozostałe, a więc (4)–(8) spośród wypowiedzi „pozytywnych” oraz (D)–(H) spośród wypowiedzi „negatywnych”.

Następnie spostrzegamy bez trudu, że każda wypowiedź „pozytywna” może zostać przeredagowana na wypowiedź „negatywną” i odwrotnie. W pewnych przypadkach każda redakcja będzie tak samo „dobra”, w innych wspomniane przeredagowanie będzie mieć charakter dość sztuczny[4]. Najczęściej twierdzenia są formułowane w postaci „pozytywnej”, gdyż są odpowiedziami na pytania o istnienie. Formułuje się wa-

[4]Oto przykłady możliwych redakcji wymienionych wyżej twierdzeń:

runki, które wystarczają, względnie są konieczne, do stwierdzenia istnienia interesującego nas obiektu. Ogólnie można powiedzieć, że badacza interesują pewne zagadnienia, których rozwiązanie ujmuje w formie wypowiedzi o charakterze „pozytywnym”, względnie „negatywnym”, w zależności od naturalnego sposobu ich sformułowania. Nie jest rzeczą łatwą ściśle określić, co się rozumie przez naturalny sposób formułowania problemu. Każdy badacz w określonej dziedzinie rozumie powyższy zwrot ze swego własnego doświadczenia. Możemy więc poprzestać na tym spostrzeżeniu i uznać rozważany zwrot za zrozumiały.

(1–) Nie istnieją liczby naturalne, które nie byłyby stopniami pewnych liczb algebraicznych.

(2–) Nie istnieje ciąg nieskończony liczb algebraicznych, który by zawierał wszystkie liczby rzeczywiste.

(3–) Nie istnieje taki ciąg operacji wykonanych przy pomocy linijki i cyrkla, który by prowadził do zbudowania dowolnego kąta i jego trysekcji.

(4–) Nie istnieje największa liczba pierwsza.

(5–) Nie istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia a, względnie taka liczba naturalna m, aby nie istniał dokładnie jeden pierwiastek arytmetyczny stopnia m z liczby a.

(6–) Nie istnieje taki zbiór X, aby nie istniał (lewy) R–moduł, którego bazą byłby zbiór X.

(7–) Nie istnieje funkcja ciągła w przedziale domkniętym oraz różniczkowalna wewnątrz tego przedziału i przyjmująca tę samą wartość na krańcach przedziału, której pochodna w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału byłaby różna od zera.

(8–) Nie istnieje niepusty zbiór liczb naturalnych, w którym nie byłoby liczby najmniejszej.

(A+) Dla każdego ciągu istnieje liczba rzeczywista, która do niego nie należy.

(B+) Istnieje taka klasa zbiorów, która nie jest zbiorem.

(C+) Dla każdego zbioru liczb porządkowych istnieje liczba porządkowa większa od każdej z liczb tego zbioru.

(D+) Każde rozwiązanie równania $x^n + y^n = z^n$ (dla $n > 2$) zawiera co najmniej jeden pierwiastek niecałkowity.

(E+) Każde rozwiązanie równania $x^n + y^n = z^n$ (dla $n > 1$) zawiera co najmniej jeden pierwiastek nie będący liczbą pierwszą.

(F+) Każda suma kwadratów dwu liczb całkowitych jest liczbą całkowitą różną od liczb postaci $4k + 3$.

(G+) Istnieje co najwyżej jedna granica dowolnego ciągu nieskończonego.

(H+) Każda retrakcja kuli euklidesowej n–wymiarowej daje w wyniku zbiór różny od brzegu danej kuli.

5. Wspomnijmy jeszcze o trzech klasycznych zagadnieniach pochodzących ze starożytności, a tyczących się rozważanego problemu. Mamy na myśli zagadnienie kwadratury koła, trysekcji kąta oraz podwojenia sześcianu. W zagadnieniach tych idzie o to, czy mając dane koło, względnie kąt, czy też sześcian, można przy pomocy jedynie linijki i cyrkla zbudować kwadrat o polu równym polu danego koła, względnie podzielić kąt na 3 przystające do siebie kąty, czy też zbudować sześcian o objętości 2 razy większej od objętości sześcianu pierwotnego. Zagadnienia te postawione w głębokiej starożytności (jeszcze przed Euklidesem, (ok. 365 — ok. 300)) doczekały się negatywnego rozwiązania stosunkowo bardzo niedawno, mianowicie pierwsze z nich dopiero pod koniec XIX wieku, zaś pozostałe dwa w latach trzydziestych XX wieku. A zatem nie jest rzeczą możliwą przy pomocy linijki oraz cyrkla zbudować kwadrat o polu równym polu danego koła, nie jest możliwa pod wymienionymi warunkami trysekcja dowolnego kąta, nie jest też możliwe podwojenie sześcianu. Innymi słowy nie istnieje skończony ciąg operacji wykonanych przy pomocy linijki i cyrkla, które by w rezultacie doprowadziły do zbudowania odcinka będącego bokiem żądanego kwadratu, dały w wyniku trysekcję dowolnego kąta, pozwoliły zbudować bok żądanego sześcianu. Są to niewątpliwie twierdzenia o nieistnieniu pewnych czynności, które by dały w efekcie pożądany wynik. Historia poucza, że ten potrójnie negatywny wynik otrzymano po wielu latach od chwili postawienia problemu[5]. Być może świadczy to o tym, że zagadnienia, które mają rozwiązanie negatywne są trudniejsze w porównaniu z zagadnieniami mającymi rozwiązanie pozytywne.

6. W związku z powyższą uwagą należy przypomnieć historię odnoszącą się do prób udowodnienia tzw. piątego aksjomatu Euklidesa. Wielokrotne próby udowodnienia go w oparciu o pozostałe aksjomaty nie powiodły się. Doprowadziło to w końcu do przekonania o niezależności rozważanego aksjomatu od pozostałych. A jeśli tak, to otworzyła się droga do wzbogacenia systemów geometrii. Jak wiadomo powstały geometrie nieeuklidesowe. Negatywny wynik prób udowodnienia piątego aksjomatu przyniósł ze sobą w efekcie skonstruowanie nowych rodzajów geometrii, poszerzenie terminu geometria. A więc dał rezultat pozytywny. Wyrażając się nieco paradoksalnie można by powiedzieć, że nieistnienie dowodu piątego aksjomatu przyniosło istnienie nowych typów geometrii, z nieistnienia wynikło istnienie. I to istnienie nowego rodzaju

[5]Por. *Historia matematyki*, pod redakcją A. P. Juszkiewicza, Tom 1, Warszawa 1975, 90–94 oraz W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Warszawa–Wrocław 1946, 241–253.

rzeczywistości matematycznej, jej istotne poszerzenie. Geometrie nieeuklidesowe nie mieszczą się w schemacie starej geometrii euklidesowej.

Przykład ten wykazuje, że negatywne rozwiązanie pewnego problemu może przynieść ze sobą konieczność szerszego spojrzenia oraz poszerzenia tej rzeczywistości, w ramach której uprawiamy badania. Wydaje się, że ten wynik należy ocenić jako niewątpliwy pozytyw pewnego przynajmniej rodzaju twierdzeń o nieistnieniu. Nie widać więc racji, dla której trzeba by było przeciwstawiać się możliwości istnienia twierdzeń o nieistnieniu. Przeciwnie, mogą one być traktowane jako podstawa dla bogatszego opisu świata, w którym żyjemy. O rzeczywistości, jej różnych postaciach, nie można z góry dekretować, a jedynie usiłować dobrze ją poznawać, nieustannie kontrolując nasze koncepcje z obiektywnym stanem rzeczy.

7. Zilustrujmy wyrażone przed chwilą myśli na jednym, jeszcze prostym przykładzie. Rozważmy równanie kwadratowe postaci $x^2 + 1 = 0$. Rozwiązując je formalnie otrzymamy: $x_1 = \sqrt{-1}$, $x_2 = -\sqrt{-1}$. Jeżeli znamy jedynie liczby rzeczywiste, to wówczas powiemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań. Nie istnieje bowiem pierwiastek kwadratowy z minus jedności. Innymi słowy mamy tu do czynienia z twierdzeniem o nieistnieniu. I otóż jeżeli zdecydujemy się na wprowadzenie nowych liczb, rozpatrując $\sqrt{-1}$ jako jedną z nich, to uzyskujemy wzbogacenie naszego zakresu dotychczasowego i zarazem rozwiązalność wspomnianego równania. Zauważmy, że nieistnienie pierwiastka kwadratowego z minus jedności w zakresie liczb rzeczywistych może być sformułowane w postaci „pozytywnej" w taki np. sposób: kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny. Konsekwentnie pierwiastek kwadratowy istnieje tylko dla liczby zero oraz liczb dodatnich. Historia poucza, że myśl naukowa poszła wskazaną drogą. Wspomniane poszerzenie dziedziny badań matematycznych, jak dobrze wiadomo, przyniosło ze sobą teorię liczb zespolonych. Należy zwrócić uwagę, że obie nazwy: liczby rzeczywiste oraz liczby zespolone nie są „szczęśliwe". Mogą nasuwać niewłaściwe intuicje odnośnie do „natury" obu rodzajów liczb. Ze ściśle logicznego punktu widzenia liczby zespolone są tak samo „rzeczywiste", jak liczby rzeczywiste. I jedne i drugie służą jako wygodne narzędzia badań w naukach o przyrodzie.

8. Dla pełności rozważań wspomnijmy jeszcze o sposobach formułowania w matematyce problemów. Ograniczymy się do jednego

tylko działu matematyki, topologii. Oto przykłady kilku problemów otwartych[6]:

(1) Czy istnieje retrakt absolutny otoczeniowy wymiaru $n > 3$, który nie zawiera żadnego dysku?

(2) Czy dla każdego $n = 1, 2, ...$ istnieje n–wymiarowy retrakt absolutny, który nie zawiera się topologicznie w przestrzeni euklidesowej $(2n - 1)$–wymiarowej?

(3) Czy dla każdego retraktu absolutnego otoczeniowego X istnieje wielościan P, który by miał ten sam typ homotopii co X?

(4) Czy dla każdego wielościanu P istnieje wielościan tego samego typu homotopijnego, który byłby prawostronnym r–sąsiadem P?

(5) Czy istnieje wielościan, który byłby osiągalny ze strony lewej (prawej) przez ciąg wielościanów?

(6) Czy istnieje przestrzeń sferoidalna trójwymiarowa, która nie byłaby sferą?

Widoczne jest tu stawianie pytań w odniesieniu do istnienia pewnych tworów matematycznych. Postawione pytania nie wykluczają odpowiedzi negatywnej. Stawiający pytanie liczy się z tego rodzaju możliwością. Innymi słowy dopuszcza udowodnienie twierdzeń o nieistnieniu pewnych obiektów. Gdyby tak nie było, to sformułowanie problemów przyjmowałoby postać np. tego rodzaju: wykazać, że istnieje twór matematyczny o takich to a takich własnościach.

Przytoczyliśmy kilka jedynie przykładów problemów otwartych z dziedziny topologii. Pomijamy inne działy matematyki, aby nie nużyć sformułowaniami zbyt specjalistycznymi. Wydaje się, że podane przykłady ilustrują wystarczająco zagadnienie będące przedmiotem naszych rozważań.

9. Wspomnieliśmy wyżej (p. 4), że formułowanie twierdzeń matematycznych w odniesieniu do problemu istnienia, względnie nieistnienia, pewnych obiektów może przyjmować jedną z dwu postaci „pozytywną" bądź „negatywną". W niektórych przypadkach oba sformułowania prezentują się jako tak samo „dobre". Trik jest w odniesieniu do tezy (4). Naturalnie brzmi twierdzenie: „Dla każdej liczby naturalnej istnieje

[6] Przykłady zostały zaczerpnięte z monografii: K. Borsuk, *Theory of Retracts*, Warszawa 1967.

liczba pierwsza od niej większa", jak też: „Nie istnieje największa liczba pierwsza". W innych przypadkach właściwe wydaje się jedno tylko ze sformułowań. A więc naturalnie brzmi sformułowanie: „Istnieją liczby algebraiczne każdego naturalnego stopnia", zaś dość sztucznie: „Nie istnieją liczby naturalne, które nie byłyby stopniami pewnych liczb algebraicznych". Podobnie „przyjemniej" brzmi sformułowanie: „Żadna liczba naturalna postaci $4k + 3$ nie jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych" w porównaniu do „Każda suma kwadratów dwu liczb całkowitych jest liczbą całkowitą różną od liczb postaci $4k + 3$". Przykładów tego rodzaju sytuacji można podawać wiele. Nasuwa się w naturalny sposób pytanie jaka jest „ostateczna" przyczyna omawianego stanu rzeczy. Wydaje się, że nie potrafi tego wytłumaczyć sama strona czysto językowa, czysto syntaktyczna. Niezbędne jest odwołanie się do aspektu semantycznego, inaczej do relacji wiążącej język z rzeczywistością, o której on orzeka. Powiedziane przed chwilą stanowi jedynie sugestie. Problemem otwartym pozostaje udzielenie pełnej odpowiedzi na zasygnalizowane pytanie. W p. 4 mówiliśmy, że „naturalny sposób sformułowania problemu" decyduje o adekwatności „pozytywnej" względnie „negatywnej" postaci odpowiedzi. Nie negując uwagi tam wypowiedzianej, w tym miejscu stawiamy pytanie dalsze tyczące się „natury", czy też „istoty" wspomnianego „naturalnego sposobu formułowania zagadnienia". Sygnalizujemy jedynie ten problem, którego rozważenie daleko wykracza poza ramy obecnego opracowania.

10. Bliższe przyjrzenie się występującym w matematyce twierdzeniom o istnieniu oraz nieistnieniu, czy też stwierdzeniom postaci „pozytywnej" oraz „negatywnej", prowadzi w bardzo naturalny sposób do problemu istnienia. Co znaczy w matematyce istnieć? Jakimi metodami można wykazywać istnienie, względnie nieistnienie, jakiegoś obiektu? Co stanowi wystarczającą podstawę dla postulowania istnienia nowych tworów matematycznych? Czym jest ograniczona możliwość poszerzania dziedzin istnienia przedmiotów matematycznych? Wyraźnie widoczne jest tutaj powiązanie zachodzące między rozważaną przez nas problematyką a zagadnieniem istnienia. Problem ten jest niewątpliwie interesujący, jednakże wcale nie łatwy i wart z pewnością oddzielnych badań.

luty 1980 r.

Mieczysław Lubański
Akademia Teologii Katolickiej
Warszawa