ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
VIII / 1986, s. 7–19*

Jean DIEUDONNÉ

LOGIKA I MATEMATYKA†

Filozofowie i logicy zajmują charakterystyczną postawę, całkowicie zresztą naturalną i zrozumiałą, wierząc w to, że matematycy interesują się tym, co oni robią. Należałoby wyprowadzić ich z błędu, nie jest to bowiem prawdą i 90% matematyków śmieje się z tego, co robią wszyscy logicy i filozofowie razem wzięci. W ogóle ich to nie interesuje. Mamy oczywiście pewien typ logiki, nazwany logiką matematyczną, która ku zadowoleniu wszystkich rozwija się prężnie od pięćdziesięciu lat, i która ma na swoim koncie znaczne sukcesy.

Dla zobrazowania stosunku liczbowego prac z logiki matematycznej do prac z matematyki (nie mających nic wspólnego z logiką), wystarczy stwierdzić, iż na około 300 stron *Mathematical Revievs* (luty 1976), jest tylko 8 stron poświęconych logice matematycznej.

Dlaczego więc matematycy nie interesują się logiką? Mieliśmy do czynienia ze słynnym kryzysem w dziedzinie fundamentów matematyki, trwającym od około 1895 do 1930 roku. Wówczas to wielu matematyków było mocno zaniepokojonych paradoksami i trudnościami rozumowania, które zdawały się wyłaniać ze wszystkich stron. Sądzę, że matematycy ówczesnego, a następnie i mojego pokolenia, przeszli pewien osobisty kryzys. Sam poświęciłem rok na wypracowanie systemu logicznego, który satysfakcjonowałby mnie. Oczywiście nie opublikowałem artykułu o nim, ponieważ byłem tak niespokojny, że musiałem udowodnić samemu sobie, że można uprawiać matematyka w sposób całkowicie spójny. System, który przyjmowany jest obecnie przez co najmniej 95% matematyków, to powszechnie znana teoria

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

†Fragment artykułu Jeana Dieudonnégo „Mathématiques vides et mathématiques significatives" z: „Penser les mathématiques", R. Apéry, H. Caveing... Paris, Edition du Seuil, 1982.

Zermelo–Fraenkla, która została uporządkowana i sformalizowana (w pracach obu autorów nie była ona bowiem jeszcze całkowicie opracowana).

System ten odpowiada dokładnie potrzebom wszystkich matematyków z wyjątkiem oczywiście logików oraz tych, których postawa filozoficzna uniemożliwia przyjęcie przesłanek wymaganego stylu, to znaczy tzw. matematyków intuicjonistów i konstruktywistów.

Konstruktywiści rosyjscy uprawiają matematykę, którą nazywają konstruktywną, ale która nie ma nic wspólnego z podstawami matematyki, konstruktywiści amerykańscy z kolei, tacy jak Bishop i jego uczniowie, są bardzo zaniepokojeni stosunkiem matematyki do rzeczywistości — problemami, z których pozostałe 95% matematyków po prostu kpi. W każdym razie logicy, którzy pracują dużo i dobrze. Czym zajmują się oni w istocie? W jaki sposób widzimy ich prace my — matematycy?

Z jednej strony badają oni możliwości systemu logicznego, tego z którym pracujemy — Zermelo–Fraenkla. Z drugiej zaś strony, co interesuje nas o wiele mniej, opracowują oni oraz badają różne inne systemy logiczne. Tak więc, kiedy mówi się nam o logice pierwszego i drugiego rzędu, o funkcjach rekurencyjnych i modelach–teoriach, bardzo ładnych i przyjemnych, które uzyskały znaczące rezultaty, my matematycy nie mamy nic przeciwko temu, aby się nimi zajmować, lecz zachowujemy w stosunku do nich dużą rezerwę[1].

[1] Badacze uprawiający logikę matematyczną uważali się zawsze za matematyków w całej pełni. Prawdę mówiąc w opinii samych logików matematycy, nie logicy, mają się tak do matematyków–logików jak w opinii matematyków mają się fizycy do matematyków. Matematycy zarzucają często fizykom (zob. dalej w tym samym artykule), że są oni kilka pokoleń do tyłu w stosunku do obecnych matematyków, a co za tym idzie, że używają teorii matematycznych całkowicie przestarzałych i bardzo skomplikowanych, gdy tymczasem mogliby skorzystać z powodzeniem z aktualnych teorii matematycznych płodnych i posiadających dużą moc, gdyby tylko zgodzili się przestawić od nowa. Podobnie logicy nie zadawalają się już podstawową teorią ZF, tak jak miało to miejsce w okresie międzywojennym i opierają raczej swoje badania na konsekwencjach jakie można wyciągnąć z mocniejszych teorii niż teoria ZF, teorii uzyskanych w wyniku dodania nowych aksjomatów do aksjomatów ZF. Matematykom, którzy dla zapewnienia pewnych podstaw swoim pracom zadawalają się jedynie teorią ZF (pomijając zupełnie mozolną pracę współczesnych renomowanych logików) należałoby przypomnieć, że kiedy Zermelo, Fraenkel i Skolem proponowali aksjomatyzacje teorii zbiorów, matematycy nie wiedzieli co z nią zrobić i interesowali się tylko naiwną teorią zbiorów, tą przedaksjomatyczną Cantora, mimo że zawierała ona sprzeczności. Czy możemy mieć nadzieję, że z czasem uda się matematykom docenić wielkie osiągnięcia obecnej logiki i że w końcu zainteresują się oni jej opracowaniami? Chodzi tu szczególnie o te prace, które, mogą mieć istotne następstwa dla prac matematyków. Prawdą jest, że ma to miejsce rzadko, ale zachodzi w sposób nieoczekiwany i zaskakujący. Większość aksjomatów dodawanych dzisiaj przez

Należałoby tutaj wprowadzić pewien komentarz. Niektórzy zadają pytanie: Co zrobicie z analizą niestandardową? To wspaniałe odkrycie sprzed piętnastu lat pochodzi o ile wiem od logików[2]. Historycznie to właśnie logicy wynaleźli tą metodę, która przyniosła im pewne dobre rezultaty. Można się spodziewać, że sprytnie wykorzystana może dać ona jeszcze lepsze wyniki. W rzeczywistości była to po prostu metoda matematyczna jak każda inna, oparta na pojęciu superproduktu[3]. Można ją wprowadzić bez trudności do systemu ZermeloFraenkla, przyjmując pewnik wyboru. Możemy stwierdzić, że teoria ta stała się częścią matematyki, ale zastosowanie jej do naszej matematyki nie ma już nic wspólnego z logika[4].

Dalszy komentarz dotyczy konsekwencji tego co robią logicy zainspirowani zresztą problemami wynikającymi z matematyki. To co nas tak interesuje jako pewna bariera, to dowody nierozstrzygalności oraz niemożliwości. Matematycy spędzili całe lata próbując udowodnić hipotezę continuum, problem ten zaprzątał ich umysły długie lata. Przypominam sobie jak mówiono kiedyś do mojego mistrza Polya, który sam był podobny do Aleksandrowa, że właśnie Aleksandrow pracował przez rok nad udowodnieniem hipotezy continuum, a potem zatrzymał się, gdy poczuł, że zaczyna po prostu wariować. I dobrze zrobił. Tak więc, gdy Gödel i Cohen stwierdzili, że bezużytecznie łamiemy sobie głowy, i że nigdy nie udowodnimy ani hipotezy continuum, ani jej negacji, odpowiedzieliśmy z ulga — „Co za szczęście! Nie będziemy się już musieli zajmować tym okropnym problemem”.

---

logików do teorii ZF, ma ważne konsekwencje dla naszej wspólnej matematyki i jesteśmy jeszcze daleko od tego, by zakończyć ocenę ich doniosłości.

[2] A. Robinson stworzył analizę niestandardową w celu uzasadnienia metod infinitezymalnych, stosowanych przez twórców analizy Newtona i Leibniza. Niektórzy matematycy marzą o tym, by uczynić z analizy niestandardowej pewne panaceum, podobnie jak usiłowano to zrobić w przypadku teorii kategorii w latach sześćdziesiątych, oraz teorii topos w ostatnich latach.

[3] Pojęcie superproduktu, użyte jest już implicite przez Skolema, w pewnym szczególnym przypadku dla ukazania niestandardowego modelu arytmetyk Peana i zostało potwierdzone i opracowane od 1955 roku przez Łosia, będąc owocną metodą w teorii modeli.

[4] Można się przekonać na podstawie lektury fundamentalnego dzieła Changa i Keislera „Model Theory” (North Holland), że pojęcie superproduktu należy do rdzenia jednej z najbardziej płodnych metod badawczych, jaką jest teoria modeli. Jeśli chodzi o samą teorie modeli to znajduje się ona na przecięciu algebry ogólnej oraz logiki, co oznacza, że algebra i logika głęboko oddziałują na siebie wzajemnie i że rozdzielenie pomiędzy metodą logiczną, a metodą algebraiczną jest w tej dziedzinie równie przestarzałe i mało uzasadnione, co podtrzymywane jeszcze przez podręczniki oddzielenie pomiędzy algebrą i geometrią. Od pewnego czasu matematycy burzą te sztuczne przedziały mając na celu większą płodność matematyki.

Z taką sama sytuacja mamy do czynienia w przypadku dziesiątego problemu Hilberta, dotyczącego problemu równań diofantycznych, niedawno rozwiązanego przez Matiasewicza. Muszę jednak przyznać, iż pomimo mojego wielkiego podziwu dla tego matematyka pierwszej wielkości, jakim był Hilbert, nigdy nie mogłem zrozumieć w jaki sposób uwierzył on, że maszyna mogłaby udzielić automatycznie odpowiedzi na wszystkie problemy diofantyny. Dlatego jestem bardzo zadowolony, że Matiasewicz wykazał, iż było to niemożliwe, co jak sądzę większość matematyków, podobnie jak ja sam, uważa za objaw zdrowego rozsądku. Nie zastępuje się mózgu maszyną.

Aby zakończyć rozważania nad logiką należałoby zaznaczyć, że wszystkie te pytania są bardzo interesujące (szczególnie z filozoficznego punktu widzenia). Dotyczą jednak tylko niewielkiej części matematyki, szczególnie gdy wchodzi w grę matematyka bourbakistów. Powiedziałbym nawet, że nie istnieją one dla matematyki bourbakistów, gdyż nie trzeba stosować w niej ogólnego pewnika wyboru lub hipotezy continuum, lecz jedynie pewnik wyboru w wersji przeliczalnej. Gdy w grę wchodzi ta kwestia, to nic więcej nie można tu zrobić. Nie można w istocie uprawiać analizy bez przeliczalnej wersji pewnika wyboru. Bardzo rzadko zdarza się, że potrzebujemy rzeczywiście ogólnego pewnika wyboru. Nie jest on potrzebny w żadnej z dziedzin, które zostaną za chwile omówione[5]. Dlaczego? Otóż mamy w tym przypadku zawsze do czynienia z przestrzeniami, które ogólnie biorąc są metryzowalne i spełniające postulat rozłączności, zaś w przypadku tych przestrzeni, dobre, stare rozumowanie taty jest zupełnie wystarczające. Tak więc w rzeczywistości nastąpiło pewne wycofanie się matematyków. Jakie są tego przyczyny? W mojej młodości byliśmy wszyscy entuzjastycznie nastawieni do szkoły Cantora i do wszystkiego co po niej przyszło — do pewnika wyboru i do — prac Zermela. Tego ostatniego wprowadzano zresztą wszędzie. Znaleziono sposób, aby stosować go tam, gdzie było to zupełnie zbyteczne, po to tylko aby rozzłościć „starych”. W końcu uświadomiono sobie, że „starzy” mieli mimo wszystko wspaniałą intuicję, kiedy bowiem byli pozbawieni środków oceny, potrafili odczuć, że sytuacja nie była dobra.

Po Gödlu i Cohenie wiemy już, że istnieje coś w rodzaju rdzenia matematyki, który opiera się właśnie na Zermelo–Fraenklu, oczywiście bez ogólnego

[5]Pewnik wyboru w wersji przeliczalnej wydaje się jednak nie wystarczający w geometrii algebraicznej i ogólnie w algebrze przemiennej, ponieważ wchodzą tutaj w gra zwykle ciała algebraicznie zamknięte i używa się ciągle lematu Zorna. Otóż lemat Zorna jest równoważny pewnikowi wyboru i założenie, według którego każde ciało można zanurzyć w ciele algebraicznie zamkniętym, opiera się na pewniku wyboru.

pewnika wyboru, a jedynie z pewnikiem wyboru dla zbiorów przeliczalnych. Jest to zbiór aksjomatów, który musimy przyjąć jeśli chcemy dalej rozwijać analizę, lub cokolwiek innego. Co się dzieje poza tą aksjomatyka? Cohen i Gödel stwierdzają, że poza tym mamy tyle matematyk ile chcemy. Moglibyśmy na przykład stwierdzić, że continuum ma wartość $\aleph_{36}$ jeśli nie $\aleph_{75}$ lub cokolwiek innego.

Dlaczego miałby to być właśnie $\aleph_1$? Dodatkowo w ostatnich latach zauważono, że jeśli tylko wyrzuci się pewnik wyboru dla zbiorów nieprzeliczalnych, a zachowa się oczywiście przeliczalny wariant pewnika wyboru, to można osiągnąć ważne cele przy pomocy innych aksjomatów, o których nikt by normalnie nie pomyślał. Przykładem, który cieszy wszystkich analityków jest aksjomat Solovaya. Wiadomo od Lebesgue'a, że niestety w zasadzie większość zbiorów na prostej, stanowią zbiory niemierzalne i fakt ten jest dość kłopotliwy. W pewnym sensie jest to absurdalne, wiadomo bowiem (nie jestem pewien czy z punktu widzenia logicznego jest to całkowicie do udowodnienia), że nie tworzy się nigdy zbiorów niemierzalnych, inaczej, niż przy pomocy pewnika wyboru w wersji nieprzeliczalnej. Znaczy to, że należy tworzyć te zbiory. Podobnie w analizie spotykamy ciągle zbiory, które bynajmniej nie są sztucznie tworzone, na przykład zbiory rozwiązań równań, które występują w sposób naturalny i co do których musimy wiedzieć czy są mierzalne. Tak więc będąc pewnym, że dany zbiór jest mierzalny łamiemy sobie głowę, by odpowiedzieć na pytanie dlaczego. Celem przeprowadzenia tej niedorzeczności, rozpoczynamy dowodzenie, które zajmie być może 2, 3 lub 4 strony. Gdybyśmy wiedzieli, że wszystkie zbiory są mierzalne, bylibyśmy spokojni i nie musielibyśmy udowadniać czegoś, o czym od początku wiadomo, że jest prawdą.

Solovay wykazał, że można stworzyć pewien system tak samo spójny, jak system Zermelo–Fraenkla, nie wprowadzając do niego ogólnego pewnika wyboru, lecz aksjomat Solovaya, który mówi, że wszystkie podzbiory R^n są mierzalne w sensie w jakim rozumiał to Lebesgue. Dla wielu analityków byłoby to o wiele przyjemniejsze niż ogólny pewnik wyboru. Mówię o tym wszystkim, aby pokazać, że poza jądrem centralnym matematyki, nazwanej matematyką bourbakistów, istnieje nieskończoność możliwości. Na razie wydaje się, że nie ma żadnego powodu by wybrać tę, a nie inną. Gdy wyeksploatuje się wystarczająco możliwości otwarte przez systemy różnych aksjomatów, być może za 20, 30 lub 200 lat, matematycy uzgodnią pewnego pięknego dnia wspólne stanowisko, pozwalające ocenić dany system jako przyjemniejszy od innych, a w konsekwencji włączyć go do matematyki, aby od tego momentu uprawiać matematykę właśnie w oparciu o ten system. Możliwe również, że to nigdy nie nastąpi i że będziemy mieli od dzisiaj tyle systemów — pochodnych systemu centralnego, ile jest możliwości zależnie od rodzaju matematyki. Nie jestem w stanie nic na ten temat powiedzieć, przyszłość przyniesie odpowiedź.

To tyle na temat pytania, dotyczącego stosunku matematyki do logiki, od tej chwili nie będę już się zajmował tą ostatnią [...].

Matematyka bourbakistowska

Do tej pory próbowałem przedstawić w jaki sposób ewoluują problemy matematyki. Teraz mogę bardzo prosto opowiedzieć, czym jest matematyka bourbakistów. Jest to matematyka, która dotyczy określonych teorii, supponując jednolitą strukturę i zależąc do pewnego stopnia od jednej metody.

Określenie „bourbakistowska" wskazuje na to, że są to teorie przedstawione na seminarium Bourbakiego. Seminarium to jest pewną instytucją stworzoną w 1948 roku, a działającą według następującego schematu: 3 razy w roku odbywają się w Paryżu, w sobotę, niedzielę i poniedziałek, konferencje, na których przedstawia się sześć prac[6]. Prace te wybierane są przez pewną grupę członków ekipy Bourbakiego (nigdy nie uczestniczyłem w wyborze tekstów, mogę o nich więc mówić z pełnym obiektywizmem), są one przydzielane chętnym osobom, które przedstawiają je podczas seminarium, a następnie zostają rozprowadzone. Przez długi czas zajmował, się tym Benjamin, a obecnie zaś Springer w „Lecture. Notes in Mathematic"[7]. Istnieje obecnie około 600 wystąpień, które obejmują całą matematykę, wchodzącą do wyżej wymienionych kategorii.

Nie należy mylić Seminarium Bourbakiego z rozprawami Bourbakiego, które dotyczą całkiem innej problematyki, to znaczy przedstawienia podstawowej części struktur, części którą powinien znać każdy matematyk, traktujący matematykę serio. Najważniejsze zastosowania nie figurują w tych rozprawach. Są one właśnie zawarte w materiałach seminarium, nie ma ich natomiast w rozprawie, gdyż są zbyt trudne do prezentacji w książkach, które przeznaczone są przede wszystkim do nauczania, wprawdzie na pewnym poziomie, ale jednak nauczania. Książka Bourbakiego zawiera pod-

[6]Te otwarte seanse mają miejsce w połowie listopada, lutego oraz czerwca każdego roku akademickiego w Instytucie Poincarégo.

[7]Springer zajmuje się publikacjami Seminarium Bourbakiego, począwszy od wystąpienia nr 347 z lat 1968–1969, każdy tom zawiera całość seansów jednego roku akademickiego. Ostatnie wystąpienie sesji czerwcowej 1981 roku nosiło nr 578.

stawy matematyki bourbakistów, tej matematyki, która jest przedstawiana w ramach seminarium. Możliwe jest dokonanie pewnej klasyfikacji tej matematyki poprzez jej uporządkowanie według „gęstości bourbakistowskiej". Gęstość bourbakistowska jest w przybliżeniu określana przez stosunek liczby wystąpień, do liczby prac opublikowanych na temat danej teorii. Pewne teorie wykazują dużą gęstość: topologia algebraiczna i różniczkowa, teoria grup Liego i ich reprezentacje o nieskończonej liczbie wymiarów, geometria algebraiczna, geometria analityczna (to znaczy teoria funkcji wielu zmiennych złożonych), czy teoria liczb. Mamy następnie teorie o mniejszej gęstości bourbakistowskiej: analiza harmoniczna przemienna, algebra homologiczna, teoria algebry von Neumanna. Mówi się również trochę o logice oraz prawdopodobieństwie. Bardzo mało poświęca się uwagi takim teoriom jak np. algebra przemienna, wektorowe przestrzenie topologiczne (mówiono o tym chyba ze dwa razy w ciągu 20 lat). Nigdy nie zajmowano się algebrą ogólną, teorią zbiorów uporządkowanych, liczbami głównymi czy porządkowymi[8].

Oto panorama, którą chciałem tu tylko zasygnalizować, a której szczegółowe rozwinięcie znajduje się w mojej pracy.

O tym, czym powinna być dzisiaj filozofia matematyki

Na zakończenie chciałbym podzielić się kilkoma refleksjami (nieco na marginesie tego odczytu), na temat tego w jaki sposób można rozpatrywać epistemologie matematyki.

„Badanie nauki, mające na celu ocenę jej wartości dla umysłu ludzkiego" — w ten sposób Petit Larousse definiuje epistemologie i matematycy mogą się tylko cieszyć z tego, że filozofowie interesują się tym z różnego od ich punktu widzenia. Dobrze byłoby jeszcze by refleksje te dotyczyły nauki takiej, jaka istnieje i żyje przed naszymi oczami, a nie jakiejś efemerycznej nauki.

Rozumiał to dobrze na przykład Lautman, który z całą energią zajął się ówczesną matematyką, aby zrobić z niej przedmiot filozoficznych studiów. Niestety, mam wrażenie, że nikt nie poszedł w jego ślady, i że większość wypowiedzi filozofów na temat matematyki dowodzi w sposób oczywisty, że nie mają oni najmniejszego pojęcia o tym, co robimy.

Z jednej strony przywiązują oni dużą wagę do rozwoju logiki matematycznej, co samo w sobie jest całkowicie usprawiedliwione i godne pochwały.

[8]Jeden wyjątek, który potwierdza jedną regułę: zob. wystąpienie J. Sterna na temat prac Jensena, dotyczących prostych liczb głównych — nr 494, listopad 1976.

To, że istnieje epistemologia logiki jest bowiem całkiem naturalne. Zwracałem już kilkakrotnie uwagę na coraz bardziej trwały charakter więzów łączących logikę matematyczną z wielkimi problemami obecnej matematyki. Z drugiej strony zbliżona tendencja polega na poświęceniu wielu rozwinięć na korzyść takich prądów heterodoksyjnych jakim jest intuicjonizm, który ma może wpływ na jednego filozofa na stu i który zaniedbuje całkowicie to co robi pozostaje 99%. Jest oczywiście zupełnie usprawiedliwione to, że jakiś filozof pragnie poznać i zanalizować wszystkie opinie, lecz nie wydaje mi się to najlepszym sposobem uprawiania epistemologii. Mielibyśmy bardzo zniekształcone pojęcie o podróżach w przestrzeni, gdybyśmy się ograniczyli do konsultacji pewnych sekt religijnych, które wierzą jeszcze w to, że ziemia jest płaska.

Nie można zaprzeczyć, że złożoność oraz zakres aktualnych dyscyplin matematycznych wymagają dużego wysiłku w celu uzyskania informacji, które ukazywałyby porządek tych dyscyplin oraz ich ewolucje. Przykład Lautmana wskazuje, iż wysiłek taki jest możliwy, wymaga tylko stanowczości oraz otwartości umysłu.

Przyszłość owocnej współpracy pomiędzy matematykami oraz filozofami w dziedzinie epistemologii wydaje się mieć wielką wartość. Moim życzeniem jest, by przyszłość taka mogła się zrealizować.

Przekład: Bogna Opolska–Kokoszka