ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XVII / 1995, s. 35–48*

Roman DUDA

PRZESZKODY EPISTEMOLOGICZNE W MATEMATYCE

1. Fenomen nauki stał się w XX wieku przedmiotem poważnej refleksji filozoficznej, a do czołowych przedstawicieli tego kierunku myślenia zalicza się K. Poppera, T. S. Kuhna, I. Lakatosa i P. K. Feyerabenda[1]. Rzadko się zdarza, by myśl filozoficzna została tak szybko podjęta i znalazła tak głęboki oddźwięk jak to się stało z tezą K. Poppera o falsyfikacjonizmie teorii naukowej[2], paradygmatem Kuhna rewolucji naukowych[3] czy nauką jako programem w sensie Lakatosa[4].

Celem tego artykułu jest przypomnienie mniej znanej koncepcji filozofa francuskiego G. Bachelarda i zilustrowanie jej przykładami z matematyki.

2. W swoim podstawowym dziele epistemologicznym G. Bachelard tak pisze: „Kiedy bada się psychologiczne uwarunkowania postępu naukowego, dochodzi się do przekonania, że *problem poznania naukowego należy definiować w terminach przeszkód* [podkr. autora]. I nie chodzi tu o rozważanie przeszkód zewnętrznych, jak złożoność czy ulotność zjawisk, ani o obwinianie zmysłów czy ludzkiego umysłu: to w samym akcie poznania, w jego wnętrzu, pojawia się, jako pewien rodzaj funkcjonalnej konieczności, powolność i zamęt. Tam właśnie znajdujemy przyczyny stagnacji, a nawet regresu i tam odkryjemy przyczyny bezwładu, które nazwiemy *przeszkodami epistemologicznymi* [podkr. moje — R.D.]. [...] Przypominając przeszłe błędy, od-

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Por. A. F. Chalmers, *Wege der Wissenschaften, Einführung in die Wissenschaftstheorie*, Springer, 1986; M. Heller, *Filozofia nauki. Wprowadzenie*, OBI — Wydawnictwo Naukowe PAT, Kraków 1992.

[2]K. Popper, *Logika odkrycia naukowego*, PWN, Warszawa 1977.

[3]T. S. Kuhn, *Struktura rewolucji naukowych*, Warszawa 1986.

[4]I. Lakatos, *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*, Cambridge Univ. Press, 1976.

najduje się prawdę w prawdziwej skrusze intelektualnej. W istocie poznaje się *wbrew* poznaniu, burząc poznanie źle dokonane i przezwyciężając to, co w samym umyśle stanowi przeszkodę dla ducha”[5].

Bachelard nie określa przeszkody epistemologicznej bliżej, jednakże z dalszych jego wywodów i przykładów staje się jasne, że nie chodzi tu o trudność jaką stawia otwarte pytanie w ramach jakiejś teorii czy metodologii, ale o barierę, jaką stwarza sama teoria czy metodologia, przyjęty w niej sposób traktowania problemu czy jego rozumienia. Z reguły bariera ta jest nieuświadamiana: osiągnięty poziom wiedzy, przyswojone metody, przyjęte założenia tak dominują sposób widzenia, że nie dostrzega się nowych wyzwań, problemów, horyzontów, istniejące zaś trudności próbuje się przezwyciężać drogą nawarstwiania komplikacji. Jest to zatem także bariera, bez przezwyciężenia której niemożliwe jest uzyskanie dobrej odpowiedzi na istotnie nowy problem, a w konsekwencji niemożliwy jest dalszy rozwój. Przełamanie i przezwyciężenie takiej przeszkody odbywa się przez jej odrzucenie lub wchłonięcie przez inny, ogólniejszy punkt widzenia.

Nazwa „przeszkoda epistemologiczna” wydaje się zbyt szeroka, nie jest to bowiem jakakolwiek przeszkoda, na jaką natrafia nasze poznanie (co sugeruje nazwa), ale przeszkoda specyficzna, wynikająca z paraliżującego działania nagromadzonej wiedzy, której wartość i zakres obiecują odpowiedź, jakiej w istocie wiedza ta nie jest w stanie dostarczyć. Wiedza ta jest jak mieniąca się bogactwem kryształowa kula, stanowiąca świat zamknięty i samowystarczalny, i nieświadoma tego, że za jej idealną powłoką są jeszcze inne światy. Z tego punktu widzenia bardziej trafna wydaje się nazwa *przeszkoda nagromadzonej wiedzy* albo *przeszkoda ograniczonego horyzontu*. Nie proponujemy jednak tej zmiany, nazwa „przeszkoda epistemologiczna” bowiem już się przyjęła.

3. Pojęcie przeszkody epistemologicznej nie doczekało się poważnych badań, a zatem nie tylko nie istnieje katalog takich przeszkód, czy choćby tylko lista ich propozycji, ale każda konkretna hipoteza może się niektórym wydać wątpliwa. Naszym zdaniem pojęcie to dobrze się jednak wpisuje w nurt rozważań Poppera, Kuhna, Lakatosa i innych. Pokażemy, że rzuca ono interesujące światło także na dzieje matematyki. Ściślej, podejmujemy w tym artykule próbę przedstawienia niektórych ograniczeń w rozwoju matematyki, które — naszym zdaniem — dobrze się tłumaczą jako przeszkody

[5]G. Bachelard, *La formation de l’esprit scientifique*, Librairie Philosophique J. Vrin, Paris 1989.

epistemologiczne w sensie Bachelarda, a także odniesiemy koncepcję Bachelarda — na obszarze matematyki — do koncepcji Poppera i Kuhna.

Przeszkody epistemologiczne najłatwiej określać *ex post*, kiedy znamy nie tylko stan ducha (teorii, metodologii, sposobu pojmowania) przed zmianami, ale i to, co nastąpiło potem oraz wzajemny stosunek obu: paraliżujące działanie przeszkody i jej przełamanie. Uwagę skupimy zatem na przejściach: między matematyką przed–grecką (egipską i babilońską) a matematyką grecką oraz między tą ostatnią a matematyką nowożytną. Nie będziemy omawiać przeszkód epistemologicznych matematyki nowożytnej.

4. W najstarszych kulturach historycznych, tych mianowicie, które zrodziły się w dolinach Nilu oraz Tygrysu i Eufratu, matematyka pojawia się od razu w postaci rozwiniętej, hermetycznej wiedzy. Postać ta jest inna w Egipcie, inna w Dwurzeczu, jednakże zakres tej matematyki i jej poziom w obu kulturach są imponujące[6]. W Dwurzeczu, na dwa tysiące lat przed Chr., występuje sześćdziesiątkowy system zapisywania liczb i wysoka technika rachunkowa, której wyrazem są tablice mnożeń i odwrotności, potęg kwadratowych i sześciennych, pierwiastków kwadratowych i sześciennych. Są też tablice intrygujące, jak Plimpton 322 z wykazem kilkunastu trójek pitagorejskich[7]. Rozpatruje się problemy rachunkowe prowadzące do równań liniowych i kwadratowych, a nawet niektórych sześciennych oraz problemy geometryczne związane z obliczaniem pól i objętości różnych figur i brył. Podobnie w Egipcie, choć tam zapis liczbowy i technika rachunkowa były bardziej (w porównaniu z babilońską) prymitywne.

Mimo tego stosunkowo wysokiego poziomu, zarówno matematyka egipska jak babilońska wyglądają jak dzisiejsze książki kucharskie: są zbiorami sposobów rozwiązywania konkretnych zadań, objaśnianych na konkretnych liczbach czy figurach, bez śladu ogólnych symboli, ogólnych pojęć czy ogólnych wskazówek, nie mówiąc o definicjach, twierdzeniach i dowodzeniach.

5. Najbardziej rzucającym się w oczy typem przeszkody epistemologicznej jest przeszkoda *notacyjna*, kiedy to przyjęty sposób notacji i uzyskana w nim biegłość nie pozwalają dostrzec ograniczeń tego sposobu.

---

[6]Por. B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, Birkhäuser, 1966; O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Providence, Rh. I., 1957; K. Vogel, *Vorgriechische Mathematik*, 2 tomy, 1958–59; H. Gericke, *Mathematik in Antike und Orient*, Springer, 1984.

[7]Interesujące analizy tej tabliczki podają: B. L. van der Waerden, *Erwachende...*, op. cit.; A. Aaboe, *Matematyka w starożytności*, Współczesna Biblioteka Naukowa Omega, PWN, Warszawa 1968.

Przykładem takiej przeszkody notacyjnej jest egipski sposób zapisywania liczb naturalnych, w którym kolejne potęgi liczby 10 wyrażały się osobnymi znakami, a metody rachunkowe opierały się na podwajaniu i dodawaniu, np. $2074 \cdot 5$ liczono tak:

$$\begin{array}{lll} 2074 & 1 \leftarrow & \\ 4148 & 2 & \\ 8296 & 4 \leftarrow & \text{suma } 10\,370 \end{array}$$

Osobliwością tego systemu były tzw. *ułamki egipskie*, to jest ułamki z licznikiem 1, co zapisujemy, zgodnie z sugestywną notacją Neugebauera[8], jako $\overline{n}\,(= 1/n)$, przy czym wynik musiał się wyrażać sumą takich ułamków o różnych mianownikach. Przyjęta technika podwajania oznaczała, że trzeba było umieć zamieniać liczby $2 \cdot \overline{n}$ na sumę różnych ułamków egipskich. I rzeczywiście, cała jedna strona papirusu Rhinda jest tablicą liczb $2 \cdot \overline{n}$ dla n nieparzystych od 3 do 101, np. $2 \cdot \overline{97} = \overline{56}\;\overline{679}\;\overline{776}$ [9].

W tym świecie nie było potrzebne zero, nie było ułamków k/n (poza jedynym wyjątkiem $2/3$), a technika rachunkowa była dość prymitywna. Z dalszej perspektywy ograniczenia były więc duże, ale nieuświadamiane: był to świat zamknięty, w pełni zaspokajający potrzeby Egipcjan, samowystarczalny intelektualnie. Nic więc dziwnego, że bez większych zmian przetrwał kilka tysięcy lat, a jego ślady w postaci techniki zwanej *duplatio* (podwajanie) będą widoczne jeszcze w średniowiecznej Europie.

6. Przeszkodę może stanowić także *brak* stosownej notacji, kiedy występują już potrzeby, ale nie można im nadać odpowiedniego wyrazu. Dobitnym przykładem takiej przeszkody były trudności, jakich doznawali matematycy greccy i arabscy, a nawet jeszcze i europejscy do XVII wieku, przy próbach ogólniejszego traktowania równań algebraicznych. Wprowadzenie i opanowanie prostych znaków algebraicznych jak $+$ (suma), $-$ (minus, odejmowanie), $\cdot$ (iloczyn), —— (kreska ułamkowa), $=$ (równość) itp. trwało kilka wieków i było przykładem bolesnego pokonywania przeszkody, nie była to jednak przeszkoda epistemologiczna w sensie Bachelarda.

7. Porównując matematykę babilońską i egipską z matematyką grecką dostrzegamy zasadniczą różnicę jakościową między oboma. W tej pierwszej, babilońskiej i egipskiej, traktaty matematyczne są zbiorami *konkretnych* za-

[8]O. Neugebauer, *The exact sciences...*, op.cit.

[9]Por. B. L. van der Waerden, *Erwachende...*, op. cit.; A. H. Chace, *The Rhind Mathematical Papyrus*, Mathematical Association of America, Oberlin — Ohio, 2 tomy, 1927–1929.

dań wraz z rozwiązaniami służącymi konkretnym zagadnieniom praktycznym takim jak pomiary pól i obliczanie danin, prace inżynierskie, gospodarka spichlerzami, obrót finansowy, obliczanie kalendarza itp. Jak pisał S. Kulczycki: „Nie popełnimy chyba omyłki uznając ekspozycję matematyczną znajdującą się w papirusach egipskich czy tabliczkach babilońskich za pierwsze stadium rozwoju naukowego, stadium, w którym myśl logiczna znajduje swój wyraz w uporządkowaniu i doborze wyodrębnionych poszczególnych czynności i nie odczuwa potrzeby jakichkolwiek dodatkowych uzupełnień podanych ustnie czy na piśmie”[10].

Przejście od tego stadium do takiego, w którym pojawiają się już owe „uzupełnienia” w postaci ogólnych objaśnień i wskazówek postępowania, widocznych w matematyce greckiej, wymagało przełamania bardzo trudnej przeszkody epistemologicznej, którą najsłuszniej będzie nazwać przeszkodą *konkretu*.

Jak kucharzowi nie są potrzebne ścisłe określenia używanych przezeń surowców, ich stanu i czynności, jakie należy na nich wykonać (por. polecenia „weź szczyptę soli”, „smaż do zarumienienia” itp.), a próbę taką poczytywałby zapewne za śmieszną i niepotrzebną, tak i starożytnemu matematykowi wystarczało intuicyjne, nabyte od swego mistrza, rozumienie pojęć takich jak trójkąt, koło, pole, walec, stożek, objętość itp. On *wiedział* co to jest trójkąt czy walec tak jak kucharz wie co to jest udziec czy mąka. Wiedza ta była *operacyjna*, pozwalała bowiem na swobodne obchodzenie się z trójkątem czy walcem, np. obliczanie jego pola czy objętości, i dawała wyniki subiektywnie *pewne*. Co więcej, wiedza ta była *przekazywalna*, a sposób przekazu — przez przerabianie dużej ilości zadań (por. praktykę kucharską) — miał duże walory dydaktyczne. „Doświadczenie pedagogiczne uczy, że do umysłów wielu ludzi, zwłaszcza młodzieży, łatwiej trafiają reguły wyłuszczone na konkretnych przykładach, wyraźnie wskazujące czynności jakie należy wykonać i ich porządek. I co więcej, przysłuchując się jak kilkunastoletni chłopiec przedstawia koledze pewną teorię, przekonujemy się, że idzie w ślady swych starożytnych nauczycieli i komenderuje: dodaj, pomnóż itd. Opis czynności toruje sobie drogę do głów, a objaśnienia ujęte naukowym językiem odczuwane są jako zawada, a nie jako pomoc”[11].

Jeśli wziąć nadto pod uwagę, że zarówno matematyka babilońska jak egipska wypracowały własne systemy notacyjne (zapis klinowy, pismo hie-

[10] S. Kulczycki, *Z dziejów matematyki greckiej*, PWN, Warszawa 1973, str. 22.
[11] Ibidem, str. 21.

roglificzne), to łatwo zdać sobie sprawę, że stworzyły własne światy intelektualne, zamknięte, nieprzenikliwe i samowystarczalne.

8. Ograniczenia tych światów najlepiej są widoczne z perspektywy matematyki greckiej. Wskażmy niektóre z nich.

(a) Brak *pojęć ogólnych*. Wszystko było konkretne, opisane jakąś miarą liczbową — długość, kąt, pole itp. — i do konkretu zmierzało. Wobec braku ogólnego pojęcia trójkąta i pojęć dalszych jak podstawa trójkąta, kąt w trójkącie itp. niemożliwe było, na przykład, zdanie „w trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe”[12] i takich zdań w matematyce babilońskiej nie było, takie zdania wykraczały poza jej horyzont myślowy.

(b) Brak *definicji*, w procesie definiowania bowiem jedno pojęcie ogólne określa się przez inne pojęcia ogólne, a tych nie było.

(c) *Uzasadnianie* opierało się na przybliżonej zgodności uzyskiwanych wyników z empirią, a z chwilą uzyskania sposobu dochodzenia do pożądanego wyniku — na autorytecie przekazu. Świadczą o tym często spotykane w źródłach egipskich i babilońskich wyrażenia „czyń podobnie”, „postępowałeś słusznie” itp. Źródłem wiedzy matematycznej były więc obserwacja, doświadczenie, indukcja, analogia, czyli w istocie metody przyrodnicze. Przy takim nastawieniu oczywiście mowy być nie mogło o dedukcji i dowodzeniu, a tym bardziej o aksjomatach i twierdzeniach. Byłoby to tak fundamentalnie obce matematyce babilońskiej czy egipskiej, że mylą się głęboko ci wszyscy, którzy liczą na znalezienie ich śladów w tej odległej epoce.

(d) W matematyce konkretu wystarczała dokładność $\pi \approx 4 \cdot \frac{64}{81} = 3,16049\ldots$[13] czy $\sqrt{2} \approx 1;24,51,10 = 1,4142128$[14], a pytanie o dokładność większą byłoby równie mało sensowne jak pytanie o to, czy do pojemnika na zboże wejdzie 10 koszów pszenicy czy kilka ziaren więcej. Innymi słowy, w matematyce babilońskiej i egipskiej nie było koncepcji *dokładności* (konstrukcji, rachunków).

Być może początków idei dokładności należy się doszukiwać w Indiach. W Sulvasutras znajduje się opis ołtarza o kształcie sokoła, zbudowanego z prostokątów[15]. Ołtarz był nie tylko miejscem ofiary bogu, ale i samym bogiem, w trakcie zaś obrzędu następowały utożsamienia sokół = ołtarz

[12] Zdanie to pierwszy wypowiedział Tales, por. *Filozofia starożytna Grecji i Rzymu*, Teksty wybrał i wstępem poprzedził Jan Legowicz, PWN, Warszawa 1970.

[13] Na takie przybliżenie wskazuje zadanie nr 50 z papirusu Rhinda, por. H. Gericke, *Mathematik in Antike und Orient*, Springer–Verlag, 1984.

[14] Tabliczka klinowa YBC 7289, por. A. Aaboe, *Matematyka...*, op. cit.

[15] Por. A. Seidenberg, *The ritual origin of geometry*, Arch. Hist. Ex. Sci. 1 (1962), str. 488–527.

oraz ofiarnik = ołtarz, a przeto także i ofiarnik = sokół, co pozwalało temu pierwszemu wzlecieć do nieba. Warunkiem powodzenia jest jednak dokładne wykonanie ołtarza.

Nie wiadomo, czy grecka koncepcja dokładności, której wyrazem jest pitagorejski dowód niewspółmierności boku i przekątnej kwadratu oraz problemy delijskie — wiąże się z indyjską.

(e) Wyraźnym rysem matematyki greckiej była troska o *niesprzeczność* używanych pojęć, wyrażająca się w nacisku na dowody konstruowalności z pomocą cyrkla i liniału. W matematyce babilońskiej czy egipskiej sam problem byłby niezrozumiały.

Interesującą ilustracją tych ograniczeń jest *okrąg*. Figura ta występuje zarówno w matematyce babilońskiej jak egipskiej, samodzielnie i jako podstawa brył przestrzennych. Na rysunkach widać jej *środek*, co świadczy o posługiwaniu się przyrządem w rodzaju naszego cyrkla. Nie ma jednak nigdzie powołania się na ów środek, obiekt geometryczny bowiem, który nie ma rozmiarów, jest w owej matematyce nie do przyjęcia.

9. Budując pojęcia ogólne, domagając się uzasadniania tez i niesprzeczności używanych pojęć, uznając dedukcję za jedynie uprawnioną metodę dowodzenia, tworząc wreszcie paradygmat teorii aksjomatyczno–dedukcyjnej i dostarczając jego znakomitej realizacji w *Elementach* Euklidesa — Grecy przełamali przeszkodę konkretu i zrobili to tak skutecznie, że *Elementy* stały się podstawowym traktatem geometrycznym obowiązującym powszechnie niemal do początku XX wieku[16], wywierającym silny wpływ na nasze widzenie świata, a paradygmat teorii aksjomatyczno–dedukcyjnej — trwale obowiązującym paradygmatem teorii matematycznej.

10. Jest rzeczą niezmiernie interesującą, że przełamanie to nie objęło całej matematyki, a jedynie jej część geometryczną. Z boku pozostał duży obszar nauki o liczbie i metody rachunkowe. Fragment tego obszaru dał się wyinterpretować geometrycznie (por. księgi arytmetyczne *Elementów*), jednakże do końca istnienia greckiej kultury nauka o liczbie nie zyskała statusu teorii. Wymownym tego przykładem jest najwybitniejsze dzieło arytmetyczne starożytności, *Arytmetyka* Diofantosa z III wieku, której 6 ocalałych ksiąg (na ogólną liczbę 13) zawiera 189 zadań z konkretnymi rozwiązaniami. Ogólny sposób formułowania tych zadań oraz dobór konkretnych liczb, dla których podawane było rozwiązanie, zdają się świadczyć o ogólniejszym za-

[16]Russel wspomina, że pod koniec XIX w. *Elementy* Euklidesa były obowiązującym podręcznikiem geometrii w szkołach angielskich, por. B. Russell, *History of Western Philosophy*, George Allen and Unwin, London 1946, str. 233.

myśle. Nie jest to jednak nigdzie napisane wprost, nie jest wyartykułowany punkt wyjścia (brak aksjomatów), dowody są rachunkami na konkretnych liczbach i nie mają zapierającej dech w piersiach ogólności dowodów Euklidesa i innych geometrów.

Takie podejście do nauki o liczbie przetrwało do XIX wieku (jeszcze Fermat postępował jak Diofantos).

11. Mimo swej zachwycającej wielkości, matematyka grecka także nie była wolna od ograniczeń epistemologicznych. Jednym z nich było przekonanie o *cykliczności* zjawisk. Dobowy ruch Słońca, fazy Księżyca, pory roku, żniwa i siew — wszystko to zdawało się świadczyć, iż życie człowieka i kosmosu przebiega cyklicznie.

Nie wchodząc w historię tego przekonania przypomnijmy, że najsilniejszy wpływ w tym względzie wywarł Platon: „Co do kształtu, to Bóg dał światu taki, jaki mu najlepiej odpowiadał i który jest zbliżony do Niego. [...] W tym celu zaokrąglił go Bóg w kształt kuli i koła z równymi odległościami od środka do krańców. Ten kształt jest spośród wszystkich najdoskonalszy i najbardziej podobny do siebie samego. Bóg bowiem zdawał sobie sprawę, że podobne jest nieskończenie piękniejsze od niepodobnego. [...] Dał mu [...] ruch fizyczny zastosowany do jego ciała, ten mianowicie spośród siedmiu ruchów, który ma przede wszystkim związek z rozumem i myślą; nadając mu obrót jednostajny w tym samym miejscu, sprawił, że się kręci w koło. [...] dał mu Bóg ciało wygładzone, jednorodne i o równej odległości od środka do obwodu, ciało pełne, doskonałe, złożone z ciał doskonałych”[17].

Do takiej samej konkluzji doszedł Arystoteles: „W rzeczy samej nie ma nic wyższego nad [niebo], nic, co by je wprawiało w ruch [...] Nie ma [ono] żadnej niedoskonałości ani braku jakiegokolwiek dobra, które jest mu właściwe. Konsekwentnie, jest rzeczą logiczną, że się porusza bez przestanku. Wszystkie rzeczy przestają się poruszać, skoro osiągnęły swoje właściwe miejsce, lecz dla ciała poruszającego się ruchem kołowym miejsce, w którym kończy ono ruch, jest miejscem, z którego wyrusza”[18].

I nieco niżej: „miarą ruchów jest ruch obrotowy nieba, bo on sam jeden jest ciągły, jednostajny i wieczny”[19].

---

[17]Platon, *Timajos Kritias albo Atlantyk*, Przełożył, wstępem, komentarzem i skorowidzem opatrzył Paweł Siwek, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, 1986; 33b–34b.

[18]Arystoteles, *O niebie*, 279 a–b; *Dzieła wszystkie*, tom IV, WN PWN, Warszawa 198?, str. 227.

[19]Ibidem, 287 b: str. 277.

Arystoteles podaje też następującą charakterystykę ruchu kołowego: „ruch kołowy nie ma absolutnego punktu wyjścia, ani absolutnego punktu końcowego, bo nie ma w nim, ściśle rzecz biorąc, ani początku, ani końca, ani środka, bo z punktu widzenia czasu jest on wieczny, a z punktu widzenia długości wraca do siebie nieustannie”[20].

12. Wpływ Platona i Arystotelesa spetryfikował wcześniejszą tradycję świata geocentrycznego i odtąd każde ciało niebieskie było już trwale związane z jakąś sferą (układem sfer), a jego ruch miał się wyrażać przez obrót tej sfery wokół jakiejś jej osi. Przy ruchu obrotowym sfery trajektoria punktu jest okręgiem, co pozwoliło Hipparchowi zamienić sfery na ruchy jednostajne po okręgach[21]. W świetle tej tradycji, chcąc *poprawnie* opisać świat, należało go przedstawiać w postaci doskonałej kuli, w której *każdy ruch odbywa się po doskonałym okręgu z prędkością jednostajną*. Rozwiązanie tak postawionego zadania stało się celem dążeń wielu generacji greckich astronomów i matematyków.

13. We wszechświecie kulistym gwiazdy stałe nie stanowiły problemu, trudności natomiast przedstawiały ruchy Słońca, Księżyca i 5 planet. Pierwszą poważną próbę podjął Eudoksos, uczeń Platona, który każdej planecie przypisał nie jedną sferę, ale więcej, przy czym każda z nich poruszała się ruchem jednostajnym obrotowym wokół swojej osi — łącznie 27 sfer. Kalipp ulepszył ten system za cenę wprowadzenia 7 sfer dodatkowych, co podniosło ich liczbę do 34. System ten nadal ulepszano, aż wreszcie Hipparch w miejsce sfer wprowadził okręgi przyjmując, że planeta porusza się z prędkością jednostajną po okręgu zwanym *epicyklem*, którego środek porusza się po innym okręgu zwanym *deferentem*, też ze stałą prędkością, przy czym środkiem deferentu jest Ziemia. I ten system ulepszano, rosła liczba okręgów i pojawiły się dalsze komplikacje, aż wreszcie Ptolemeusz zbudował system najlepszy[22], a jego dzieło *Almagest* (tytuł pochodzi z przekładu arabskiego) było podstawową księgą astronomiczną aż do XVII wieku.

W systemie Ptolemeusza spotkały się filozofia, astronomia i matematyka: system wyrastał z przesłanek filozoficznych, opisywał zjawiska astronomiczne i robił to w języku matematyki. Wskazuje to na znaczenie filozofii

[20]Ibidem, 288 a; str. 282.

[21]Historię budowania przez Greków modelu geocentrycznego podaje M. Kline, *Mathematics and the search for knowledge*, Oxford Univ. Press, 1985. Por. także: A. Koestler, *Les somnambules. Essai sur l'histoire des conceptions de l'Univers*, Callmann — Lévy, 1960.

[22]Współczesny opis tego systemu podaje R. R. Newton, *The crime of Claudius Ptolemy*, The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore and London 1978.

dla nauki i na rolę matematyki. Sam Ptolemeusz w XIII księdze *Almagestu* pisał, że astronomia powinna zmierzać do najprostszego modelu matematycznego[23].

14. Model Ptolemeusza był używany w astronomii przez niemal półtora tysiąclecia i w granicach tolerancji ówczesnych instrumentów dawał wyniki poprawne. Kopernik podważył jeden element tego modelu, mianowicie centralne położenie nieruchomej Ziemi, ale i on zachował ruchy po okręgach, co sprawiło, że teoria Kopernika nie zgadzała się dobrze z obserwacjami. Dopiero Kepler wyrwał się z tego zaklętego kręgu i ruchy po okręgu zamienił na ruchy po elipsie.

Model Ptolemeusza został zastąpiony innym nie dlatego, że był fałszywy (przeciwnie, był poprawnym rozwiązaniem matematycznego problemu), ale dlatego, że ten inny model, heliocentryczny, był matematycznie prostszy. Zmiana ta oznaczała przełamanie przeszkody epistemologicznej, której źródłem była filozofia.

15. Ciekawe, że ta sama przeszkoda — przekonanie o cykliczności zjawisk — pojawiła się także w innych kulturach, przy czym w tak od Grecji odległych jak Chiny i prekolumbijska Ameryka.

W Chinach Czu Hsi (1131–1200) dowodził wieczności świata nadając mu charakter serii okresów kosmicznych trwających po $30 \times 360 \times 12 = 129\,600$ lat[24].

U Azteków: „Myśl kosmologiczna mieszkańców Meksyku nie czyniła ostrego rozróżnienia między przestrzenią a czasem. W szczególności obce jej było traktowanie przestrzeni jako środowiska neutralnego i jednorodnego, niezależnego od przebiegających w nim procesów. Przestrzeń faluje przechodząc od jednej z wielu różnych kategorii do następnej, w łańcuchu sukcesji wyznaczonym przez świat ustalony i cykliczny. [...] Prawem wszechświata jest przeplatanie się różnych, wyraźnie oddzielających cech, które dominują, znikają i pojawiają się bez końca"[25].

16. Inną przeszkodą epistemologiczną w matematyce greckiej była obawa przed *nieskończonością*.

---

[23]Cytuję za: M. Kline, *Mathematics. The loss of certainty*, Oxford Univ. Press, 1980, str. 36 przekładu rosyjskiego.

[24]S. Jaki, *Science et Création*, 1984; cytuję za: M.–D. Philippe, J. Vauthier, *Le manteau du mathématicien*, Editions Universitaires et Editions Mame, 1993.

[25]J. Soustelle, *La pensée cosmologique des anciens Mexicains: répresentation du monde et de l'espace*, Herman, 1940; cytuję za: M.–D. Philippe, J. Vauthier, *Le manteau...*, op. cit., str. 64.

Nieskończoność zaskakiwała Greków niespodziankami, niepokoiła paradoksami. Zdawała się nie do opanowania: „Problem nieskończoności wiąże się z zasadniczą trudnością: bo niezależnie od tego, czy się przyjmie jej istnienie, czy się odrzuci, wytwarza się rzecz niemożliwa do utrzymania"[26].

Zamknięty w kryształowej kuli świat miał skończone rozmiary i Arystoteles, a także inni filozofowie, nie żałowali wysiłku, by pokazać, że jest to świat skończony pod każdym względem. Jedynym ustępstwem ze strony Arystotelesa było dopuszczenie, zgodnie z jego teorią aktu i możności, nieskończoności *potencjalnej*, przy bardzo zdecydowanym odrzuceniu nieskończoności *aktualnej*[27].

Rozróżnienie to, ważne także i dziś, zostało dokonane z myślą o matematykach: „Pogląd nasz nie pozbawia bynajmniej matematyków ich teorii przez odrzucenie aktualnego istnienia nieskończoności [...] w rzeczywistości niepotrzebna jest im nieskończoność ani też z niej nie korzystają. Posługują się natomiast dowolnie wielkimi liczbami, ale skończonymi"[28].

Istotnie, w geometrii linie proste były *de facto* odcinkami skończonymi, które w razie potrzeby można przedłużać. Słynny Postulat Równoległych Euklidesa (*Elementy*, księga I, postulat V) jest w istocie warunkiem, przy którym dwa odcinki przetną się (po przedłużeniu) w skończonej odległości:

Jeśli prosta, padająca na dwie proste, tworzy kąty wewnętrzne po jednej stronie mniejsze od dwóch prostych, to te dwie proste przedłużane nieograniczenie zetkną się z tej strony, gdzie kąty są mniejsze od dwóch prostych.

Prosta nieskończona pojawi się dopiero w czasach nowożytnych w związku z zasadą bezwładności[29].

Grecy traktowali punkt jako „to co nie ma części" (*Elementy*, księga I, definicja 1) i wprawdzie przyjmowali, że punkty mogą leżeć na prostych, to jednak odrzucali rozumienie prostej jako zbioru punktów: „Byt zaś pozbawiony części nie ma rozmiarów, a przeto z bytów pozbawionych części nie mogłaby powstać wielkość ciągła. Nie może więc powstać ani linia z punktów, ani czas z chwil"[30].

---

[26] Arystoteles, *Fizyka*, 203 b; *Dziela wszystkie*, tom II, WN PWN, Warszawa 1990, str. 72.

[27] Ibidem, 206 a; str. 77–78.

[28] Ibidem, 207 a; str. 81.

[29] R. Duda, *The place of Newton's* Principia *in the evolution of the idea of space*, w książce: *Newton and the new direction in science*, Proceedings of the Cracow Conference, Città del Vaticano 1988.

[30] Arystoteles, *O odcinkach niepodzielnych*, 971 b; *Dzieła wszystkie*, tom IV, op. cit., str. 747.

Ten ostatni przykład świadczy, że Grecy nie tylko „cofali się przed milczeniem nieskończonych przestrzeni", ale także przed nieskończonością lokalną. Nie umieli sobie poradzić z paradoksami Zenona i był to zapewne czynnik decydujący o tym, że nie stworzyli pojęcia granicy, zadowalając się pochodzącą od Eudoksosa metodą wyczerpywania, która polegała na zbliżaniu się do celu z przybliżoną dokładnością, skończenie wieloma skończonymi krokami.

Przykładem świetnego zastosowania tej metody jest traktat Archimedesa *Mierzenie okręgu*[31], w którym wpisując i opisując wielokąty foremne w i na okręgu pokazuje, że (w naszej symbolice)

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}.$$

Odrzucając nieskończoność Grecy nie byli w stanie wyrazić dokładnej wartości liczby π (my to możemy zrobić za pomocą szeregu nieskończonego lub całki) i aproksymacja Archimedesa była najlepsza, na jaką zdobyła się starożytność.

17. Po przytoczeniu koncepcji przeszkody epistemologicznej Bachelarda oraz podaniu paru przykładów takiej przeszkody w dziejach matematyki, pora na ogólniejsze wnioski.

(a) Przeszkoda epistemologiczna nie jest jedynym rodzajem utrudnienia w rozwijaniu matematyki (patrz punkt 5 powyżej), ale z pewnością jednym z ważniejszych. Dzięki swemu organicznemu związkowi ze stanem matematyki do momentu jej przezwyciężenia rzuca ona silne i ciekawe światło na matematykę jako na rodzaj ludzkiej aktywności.

Z tego punktu widzenia pojęcie przeszkody epistemologicznej powinno stać się przedmiotem większego zainteresowania ze strony dydaktyków matematyki oraz historyków i filozofów nauki.

(b) Wykrycie i opisanie przeszkód epistemologicznych może mieć znaczenie praktyczne dla nauczania[32]. Jeśli bowiem przyjąć zasadę biogenetyczną w jej wersji rozszerzonej, to znaczy uznać, że rozwój intelektualny dziecka powtarza, w wielkim naturalnie skrócie, rozwój intelektualny ludzkości[33], to

[31] Obszerne cytaty z tego traktatu, wraz z komentarzem, zawiera książka P. Dedron, J. Itard, *Mathematics and mathematicians*, tom II, The Open Univ. Press.

[32] Badania nad przeszkodami epistemologicznymi w matematyce z punktu widzenia dydaktyki matematyki prowadzi A. Sierpińska, *Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki*, „Dydaktyka Matematyki" 8 (1987), str. 103–153.

[33] Zasadę tę sformułował E. Haeckel w 1886 r., odnosząc ją z powodzeniem do badań nad kręgowcami. Zyskała ona powszechne uznanie przyrodników i stała się znana także poza granicami zoologii.

ujawniona przeszkoda epistemologiczna w rozwoju matematyki może nam dużo powiedzieć o trudnościach dziecka przy uczeniu się jakiegoś fragmentu matematyki, a także podsunąć sposoby na zmniejszenie tych trudności.

(c) Koncepcja przeszkody epistemologicznej dobrze się wpisuje w nurt rozważań ewolucyjnej teorii nauki, której głównymi reprezentantami są Popper, Kuhn i Lakatos.

W 1934 r. Popper sformułował pogląd[34], że teoria jest naukowa, gdy wynikające z niej wnioski mogą być przez doświadczenie obalone (odrzucone, sfalsyfikowane). Dzisiaj pogląd ten nosi nazwę *zasady falsyfikacjonizmu* i zasada ta jest przez wielu uważana za kryterium naukowości.

Poprawnej teorii matematycznej obalić się wprawdzie nie da, ale jeśli zasadę falsyfikacjonizmu w matematyce rozumieć jako możliwość wyboru jednej z dwóch teorii, a w konsekwencji odrzucenie teorii mniej satysfakcjonującej, np. bardziej złożonej lub brzydszej estetycznie, jak to się stało z teorią ułamków egipskich czy teorią geocentryczną Ptolemeusza, to dostrzegamy, że i w matematyce ma ona zastosowanie.

Z kolei Kuhn wyraził pogląd, że teoria naukowa, której opis jakiegoś fragmentu rzeczywistości przestaje zadowalać, jest odrzucana lub wchłaniana przez teorię szerszą[35]. Z tego rodzaju „rewolucjami" mamy do czynienia nie tylko w astronomii, fizyce i chemii, skąd Kuhn czerpał swoje przykłady, ale także w matematyce. Kiedy teoria matematyczna odnosi się wprost do rzeczywistości, jak to było z teorią geocentryczną Ptolemeusza, to sprawa jest prosta, ale bywa, że i teorie czystej matematyki przestają zadowalać i są odrzucane (jak ułamki egipskie czy teoria wyczerpywania) lub wchłaniane przez teorie szersze (jak geometrie Euklidesa, Riemanna i Bolyai–Łobaczewskiego przez teorię rozmaitości o stałej krzywiźnie). Często wiąże się to z przełamaniem przeszkody epistemologicznej.

18. Wydaje się, że pojęcie przeszkody epistemologicznej otwiera interesujące możliwości poznawcze przed historykami i filozofami nauki, a w szczególności możliwość nawiązania bliższego kontaktu historii matematyki z ewolucyjną teorią nauki.

Roman Duda

[34] K. Popper, *Logika...*, op. cit.
[35] T. S. Kuhn, *Struktura...*, op. cit.