ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXII / 1998, s. 15–34*

Jerzy DADACZYŃSKI

# KONCEPCJA MATEMATYKI G. CANTORA A IDEA LOGICYZMU

Istnieją dwie podstawowe przyczyny, dla których podjęto zasygnalizowane w tytule pracy dociekania[1]. Pierwsza ma charakter historyczny. G. Cantor prowadził swe badania w zakresie matematyki, a także równolegle w zakresie podstaw matematyki i filozofii matematyki w tym samym okresie, w którym G. Frege tworzył nowoczesną ideę logicyzmu[2]. Chodzi o lata osiemdziesiąte i dziewięćdziesiąte XIX wieku. Niemiecki matematyk był nawet recenzentem jednej z tych prac G. Fregego, w których ten ostatni prezentował ideę logicyzmu, zawierającą wyniki badań jednego z pierwszych

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Prowadzono już badania relacji odwrotnej. Chodziło w nich o ukazanie wpływu prac G. Cantora na realizację idei logicyzmu w pracach B. Russella [por. I. Grattan–Guiness, *Georg Cantor's influence on Bertrand Russell*, „History and Philosophy of Logic" 1 (1980), s. 61–93.]. W tym wypadku chodzi natomiast o odpowiedź na pytanie, na ile G. Cantor antycypował, przynajmniej niektóre, elementy nowoczesnego logicyzmu.

[2]Pierwszy koncepcję logicyzmu jako wyprowadzenia całej matematyki z logiki zaprezentował na przełomie XVII i XVIII wieku niemiecki filozof i matematyk G. W. Leibniz. Jednakże matematyka i logika jego czasów były na tyle niedojrzałe, że owa idea była w istocie nie do przeprowadzenia. Przede wszystkim teorie matematyczne owego czasu nie były zaksjomatyzowane (poza oczywiście geometrią Euklidesa) i nie tworzyły jednego, zunifikowanego systemu, w którym wszystkie teorie zaliczone wówczas do matematyki byłyby wywiedlne, przynajmniej pośrednio, z jednej teorii podstawowej. Po wtóre, znana wówczas logika, to przede wszystkim logika nazw Arystotelesa. Prawdopodobnie G. W. Leibniz był również pierwszym twórcą, obok innych rachunków, algebry Boole'a. Niemiecki filozof nie zwrócił uwagi na antycypowaną przez stoików i logików średniowiecznych logikę zdań. Nie znał też stworzonego dopiero przez G. Fregego rachunku kwantyfikatorów. Nie istniała teoria mnogości, zbudowana przez G. Cantora. Dopiero znajomość tych wszystkich teorii umożliwiła próbę realizacji idei logicyzmu na przełomie XIX i XX wieku. Dlatego zasadne jest stwierdzenie, że G. W. Leibniz, aczkolwiek jako pierwszy sformułował ideę logicyzmu, jednak nie był w stanie jej zrealizować.

etapów realizacji tej idei[3]. Obaj pracowali w położonych bardzo blisko siebie ośrodkach uniwersyteckich Niemiec. G. Cantor był zatrudniony w Halle, natomiast G. Frege w Jenie. Bliskość miejsc pracy nie zaowocowała jednak bezpośrednią współpracą obydwu uczonych.

Druga przyczyna podjęcia niniejszych badań jest natury merytorycznej. Łatwa do skonstatowania jest zbieżność zainteresowań zwolenników logicyzmu i G. Cantora. Pracowali oni twórczo w zakresie badania podstaw matematyki i filozofii matematyki. Zarówno logicyści, jak i G. Cantor manifestowali swój antykantyzm w filozofii matematyki. G. Cantor w zaciętej dyskusji z L. Kroneckerem sprzeciwiał się głoszonej przez tego ostatniego kantowskiej tezie, że matematykę można wyprowadzić z apriorycznej formy naoczności czasu. G. Frege oraz B. Russell oraz A. N. Whitehead budowali logiczne podstawy matematyki między innymi w tym celu, by wykazać, że twierdzenia matematyki są analityczne, podobnie jak twierdzenia logiki[4]. Występowali w ten sposób przeciwko słynnej tezie I. Kanta, według której twierdzenia matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*.

Wspomniane związki G. Cantora z logicystami natury zarówno historycznej, jak i geograficznej oraz merytorycznej pozwalają zasadnie postawić pytanie, na ile G. Cantor w wyniku swoich badań antycypował, czy też współtworzył ideę logicyzmu.

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie, trzeba najpierw wykonać dwa zasadnicze kroki badawcze. Najpierw należy przedstawić założenia ideowe logicyzmu. Następnie wypada przedstawić w zarysie sposób realizacji tego programu. Prezentując program logicyzmu i sposób jego realizacji, należy wskazać, na ile dorobek naukowy G. Cantora przygotowywał sam program logicyzmu, jak i to, na ile umożliwił realizację tej idei.

Zgodnie z zaprezentowanym programem badań należy najpierw przedstawić sformułowanie programu logicyzmu. Klasyczne sformułowanie tego

[3]Por. G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch–mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884; G. Cantor, *Rezension der Schrift von G. Frege* „Die Grundlagen der Arithmetik", Breslau 1884, „Deutsche Literaturzeitung für Kritik der internationalen Wissenschaft" 6 (1885), s. 728–729, [w:] GA, s. 440–442 [GA = G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und Philosophischen Inhalts*, hrsg. E. Zermelo, Berlin 1932, reprint Berlin, Heildelberg, New York 1980.].

[4]G. Frege zdecydowanie odróżniał sądy arytmetyki od sądów geometrii. Te pierwsze traktował jako sądy analityczne *a priori*. Drugie natomiast jako sądy syntetyczne *a priori*. W późniejszych latach, kiedy jego program natknął się na trudności związane z odkryciem antynomii, G. Frege zwrócił się w filozofii matematyki ku kantyzmowi [por. I. Dąmbska, *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX wieku*, „Archiwum Historii Filozofii i Myśli Współczesnej" 34 (1978), s. 167–213.].

programu pochodzi od B. Russella[5]. Można go zaprezentować jako koniunkcję czterech tez:

1. wszystkie pojęcia matematyczne, w tym pojęcia pierwotne teorii matematycznych, można zdefiniować *explicite* przy pomocy pojęć czysto logicznych;

2. aksjomaty, czyli tzw. twierdzenia pierwotne matematyki, mogą być wyprowadzone z aksjomatów logicznych drogą czysto logicznej dedukcji;

3. wszystkie twierdzenia matematyczne są dedukowalne z twierdzeń pierwotnych (aksjomatów);

4. wspomniana dedukcja opiera się na logice wspólnej dla wszystkich teorii matematycznych, czyli uzasadnienie twierdzeń w poszczególnych teoriach matematycznych odbywa się w oparciu o te same podstawowe zasady, tworzące jedną dla całej matematyki logikę. Teza ta odwołuje się do spostrzeżenia, że większość teorii matematycznych budowana jest za pomocą jednej logiki, mianowicie logiki klasycznej, oraz do przekonania, że wszystkie argumentacje matematyczne mogą być sformalizowane.

Warto zwrócić uwagę na koniunkcję tezy 2 oraz 3. Z owej koniunkcji wynika, że można wskazać zbiór aksjomatów matematyki, z których wyprowadzić można wszystkie twierdzenia owej dyscypliny. Wszystkie zaś wyróżnione aksjomaty matematyki są wyprowadzalne z twierdzeń logiki.

Aby można było wypowiedzieć te twierdzenia, matematyka musiała się stać dyscypliną stosunkowo dojrzałą z punktu widzenia historycznego. Jest prawdą, że po raz pierwszy podobne poglądy na matematykę (jej wyprowadzalność ze skończonego zbioru aksjomatów) zostały *implicite* sformułowane w programie badań matematyki pitagorejczyków już w IV wieku p. n. e. Przedstawiciele tej szkoły filozoficzno–matematycznej byli przekonani o tym, że całą matematykę — przede wszystkim geometrię, ale również teorię stosunków liczbowych — da się wyprowadzić z arytmetyki liczb naturalnych. Nie sformułowali oni natomiast twierdzenia, że arytmetykę liczb

[5]Program B. Russella został przedstawiony na podstawie opracowania J. Perzanowskiego [por. J. Perzanowski, *Logicyzm*, [w:] *Mała encyklopedia logiki*, Wrocław 1988, s. 93–95.].

naturalnych da się zbudować przy pomocy metody aksjomatycznej. Skądinąd pewne jest, że pitagorejczycy, jeszcze przed Euklidesem, posługiwali się metodą aksjomatyczną w budowaniu swojej geometrii. Jednakże odkrycie niewymierności, które było początkiem starożytnej rewolucji naukowej, podważyło pitagorejski program arytmetyzacji matematyki. Zamiast tego zaczęto geometryzować arytmetykę (algebrę).

W wieku XVII i XVIII, kiedy po raz pierwszy G. W. Leibniz podał ideę logicyzmu, matematyka, z historycznego punktu widzenia, była jeszcze w takim stanie, że idei logicyzmu nie dało się w praktyce przeprowadzić. Po prostu nie można było wskazać zbioru aksjomatów, z których wyprowadzalne byłyby wszystkie twierdzenia ówczesnej matematyki. Poza geometrią, zaksjomatyzowaną jeszcze przez Euklidesa, nie stosowano wówczas metody aksjomatycznej w badaniach innych dyscyplin matematyki. Szczególnie dyskusyjne były podstawy burzliwie rozwijającej się analizy matematycznej, które oparto na pojęciu wielkości nieskończenie małych. Nie było jeszcze żadnej teorii liczb niewymiernych (rzeczywistych), poza teorią Eudoksosa, która odwoływała się jednak do geometrycznego w istocie pojęcia wielkości. Natomiast istotny krok uczyniony został w XVII wieku w ukazaniu związków algebry (arytmetyki) z geometrią. Chodzi o zbudowanie niezależnie przez P. Fermata i Kartezjusza geometrii analitycznej. W ten sposób geometria mogła zostać sprowadzona do arytmetyki (algebry).

Przełomowy dla ukazania możliwości wyprowadzenia całej matematyki ówczesnej z pewnego zbioru aksjomatów okazał się być wiek XIX. To wówczas została sformułowana idea, w swej istocie metamatematyczna, która została podjęta i wykorzystana przez twórców logicyzmu. Wspomniana idea została zresztą nie tylko sformułowana, ale i przeprowadzona i potwierdzona w wyniku badań matematycznych. Chodzi o ideę systematyzacji matematyki. Można ją rozumieć jako kwestię znalezienia merytorycznego uporządkowania dyscyplin i teorii matematycznych, planu, według którego możliwe byłoby rozwinięcie matematyki jako jednolitej budowli. W zasadzie koncepcja systematyzacji matematyki w XIX wieku sprowadzała się do:

1. aksjomatyzacji zastanych dyscyplin matematycznych;
2. budowania modelu jednej teorii w dziedzinie innej teorii; wówczas można było drugą teorię traktować jako bardziej podstawową, taką, z której wyprowadzalna jest pierwsza teoria;
3. wskazania teorii najbardziej podstawowej, z której wyprowadzalne są teorie pozostałe.

Już w tym miejscu można wskazać, jak ważna dla idei logicyzmu była sformułowana i przeprowadzona w XIX wieku idea systematyzacji matematyki. Właśnie aksjomaty teorii podstawowej w matematyce były aksjomatami, z których można było wyprowadzić wszystkie twierdzenia matematyki. Logicystom pozostawało wówczas „jedynie" zadanie udowodnienia aksjomatów teorii podstawowej matematyki przy pomocy aksjomatów logiki oraz wynikających z nich twierdzeń logicznych. Należało też oczywiście zdefiniować pojęcia podstawowe, występujące w aksjomatyce teorii podstawowej matematyki, przy pomocy pojęć logicznych. Innymi słowy: realizacja idei systematyzacji matematyki w XIX wieku była w praktyce warunkiem *sine qua non* realizacji idei logicyzmu.

Jeśli zatem wskaże się zasługi G. Cantora w zakresie systematyzacji matematyki XIX wieku, to można będzie zasadnie mówić, że przyczynił się on do powstania i realizacji idei logicyzmu na przełomie XIX i XX wieku.

Trzeba zaznaczyć, że systematyzacja matematyki w XIX wieku nie miała swojego ideologa. Nie przedstawiono w żadnym znanym dokumencie zapisu idei systematyzacji, tak jak to uczyniono w niniejszej pracy. Tym niemniej wielu matematyków pracowało, kierując się koncepcją systematyzacji. Wśród nich należy wymienić A. Cauchy'ego, B. Bolzano, K. Weierstrassa, F. Kleina, H. Grassmanna, H. Hankela, Ch. Meray'a, R. Dedekinda, G. Peano i właśnie G. Cantora. Proces systematyzacji matematyki w XIX wieku można nazwać arytmetyzacją matematyki klasycznej[6]. Za dziedzinę podstawową matematyki zaczęto bowiem wówczas uważać arytmetykę liczb naturalnych. Do niej — jak sądzono — można było sprowadzić wszystkie znane dyscypliny matematyczne, czyli właśnie matematykę klasyczną. Relację sprowadzania rozumiano wówczas jako możliwość wskazania lub skonstruowania modelu jednej teorii w dziedzinie matematycznej, będącej modelem innej teorii. Przy czym tę drugą uważano za bardziej podstawową, pierwotną logicznie.

Jeszcze na początku XIX wieku wydawało się, że systematyzacja matematyki będzie niemożliwa. Istotnym problemem było sprowadzenie analizy matematycznej, opartej od czasu jej powstania na niejasnym i budzącym wiele kontrowersji pojęciu wielkości nieskończenie małej, do arytmetyki liczb naturalnych. Przeszkodę tę dało się jednak usunąć w dwóch przebiegających po części równolegle etapach.

---

[6]Zasadnicze wiadomości na temat arytmetyzacji matematyki w XIX w. wieku zawarte są w pracy N. Bourbaki [por. N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, tłum. z franc. S. Dobrzycki, Warszawa 1980.].

Po pierwsze, dzięki pracom B. Bolzano, A. Cauchy'ego i K. Weierstrassa udało się wyeliminować z analizy matematycznej wielkości nieskończenie małe i oprzeć tę dyscyplinę na pojęciu liczb rzeczywistych. Drugi etap sprowadzenia analizy do arytmetyki liczb naturalnych polegał na kolejnym znajdywaniu modeli: teorii liczb całkowitych w dziedzinie liczb naturalnych, teorii liczb wymiernych w dziedzinie liczb całkowitych oraz teorii liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych.

Pierwszego i drugiego zadania drugiego etapu arytmetyzacji podjęło się około roku 1860 kilku matematyków: H. Grassmann, H. Hankel oraz K. Weierstrass. Ten ostatni — w swych nie publikowanych wykładach — przedstawił najprawdopodobniej po raz pierwszy pomysł uzyskania modelu liczb całkowitych w dziedzinie uporządkowanych par liczb naturalnych oraz modelu liczb wymiernych w dziedzinie uporządkowanych par liczb całkowitych. Natomiast trzeciego zadania, które wymagało, w takiej czy innej formie, przyjęcia istnienia zbioru aktualnie nieskończonego, podjęli się z dobrym skutkiem, aczkolwiek przy zastosowaniu dość odmiennych metod, prawie jednocześnie około roku 1870, K. Weierstrass, R. Dedekind, Ch. Meray i G. Cantor[7].

Realizacja drugiego etapu arytmetyzacji oznaczała również arytmetyzację geometrii euklidesowej. Formalnie krok ten został uczyniony miedzy innymi przez G. Cantora, kiedy przyjął on aksjomat stwierdzający, że każdej liczbie rzeczywistej odpowiada dokładnie jeden punkt w jednowymiarowej przestrzeni z metryką euklidesową[8]. Właśnie w zakresie rozumienia istoty geometrii pojawiły się jednak w wieku XIX przeszkody, które — jak się początkowo wydawało — uniemożliwiały uznanie matematyki (matematyki z geometrią) za jednolitą strukturę, której wszystkie gałęzie byłyby sprowadzalne do arytmetyki liczb naturalnych. Zacięte dyskusje nad istotą geometrii rozpoczęły się około roku 1870, gdy na skutek publikacji prac N. Łobaczewskiego, K. Gaussa i wygłoszenia słynnego wykładu inauguracyjnego

[7]Dla uzupełnienia obrazu drugiego etapu arytmetyzacji analizy należałoby jeszcze dodać, że uzyskanie modelu liczb zespolonych w teorii liczb rzeczywistych było sprawą prostą. Od dawna operowano w matematyce modelem geometrycznym liczb zespolonych, w której każdą liczbę utożsamiano wzajemnie jednoznacznie z jednym punktem dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Ponieważ każdemu punktowi takiej przestrzeni można było wzajemnie jednoznacznie przyporządkować parę uporządkowaną liczb rzeczywistych, zatem istniał model teorii liczb zespolonych w dziedzinie par uporządkowanych liczb rzeczywistych. Oznaczało to arytmetyzację teorii liczb zespolonych.

[8]Por. G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, „Mathematische Annalen” 5 (1872) Bd. 5, s. 123–132, [w:] GA, s. 92–102.

przez B. Riemanna aktualna stała się kwestia geometrii nieeuklidesowych. Tym niemniej już w tym samym roku F. Klein znalazł dla geometrii Łobaczewskiego i Riemanna modele euklidesowe, co oznaczało arytmetyzację nowych teorii geometrycznych[9].

Należy w tym miejscu wskazać na dorobek G. Cantora w zakresie systematyzacji matematyki XIX wieku. Przede wszystkim należy wspomnieć, że należał on do szkoły matematycznej K. Weierstrassa, która najbardziej przyczyniła się do systematyzacji matematyki. Sam zaś G. Cantor wykonał jedno z najważniejszych i najtrudniejszych zadań w zakresie systematyzacji. Znalazł on model dla teorii liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych. Technika owego rozwiązania polegała na zdefiniowaniu liczb rzeczywistych jako zbioru nieskończonych ciągów współzbieżnych liczb wymiernych. Ciągi te zostały nazwane ciągami podstawowymi. Klasa abstrakcji danego ciągu zbieżnego, względem relacji współzbieżności wyznaczała liczbę rzeczywistą, wymierną bądź niewymierną. Zadanie to zostało wykonane przez G. Cantora w roku 1872[10], niezależnie od równoważnej konstrukcji liczb rzeczywistych R. Dedekinda, który oparł się na pomyśle Eudoksosa.

Warto też w tym miejscu zaznaczyć charakterystyczne dla nurtu systematyzacyjnego w matematyce XIX wieku odrzucenie przez G. Cantora istnienia wielkości nieskończenie małych[11]. Wiązało się to z przekonaniem, że wielkości te nie są już konieczne dla ufundowania podstaw analizy matematycznej, którą można było oprzeć na liczbach rzeczywistych. Poza tym G. Cantor wprost twierdził, że dziedziną podstawową[12], a więc taką, do której można w procesie systematyzacji sprowadzić wszystkie dyscypliny matematyczne, jest arytmetyka.

Z przeprowadzonych analiz wynika, że twórca teorii mnogości nie tylko prezentował przekonanie o możliwości systematyzacji matematyki znanej

---

[9]W zasadzie nieco wcześniej, w roku 1868, modele euklidesowe dla geometrii nieeuklidesowych znalazł pracujący poza środowiskiem matematyków niemieckich E. Beltrami [por. E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non–euclidea*, „Giornale di Matematiche" 6 (1868), s. 284–312.].

[10]Por. G. Cantor, jw.

[11]Por. G. Cantor, *List do K. Weierstrassa z 16.05.1887*, [w:] *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, [w:] GA, s. 407–409.

[12]„Der Zweck dieses Schriftens, die grundlagen der Arithmetik einer erneuten Untersuchung zu unterferfen, ist ein löblicher, denn es unterliegt keinem Zweifel, daßdieser Zweig der Mathematik, welcher allen anderen mathematischen Disziplinen zur Basis dient, eine weit tiefere Erforschung seiner Grundbegriffe und Methoden verlangt, als się ihm bisher im allgemeinen zu Teil geworden ist" — G. Cantor, *Rezension der Schrift von G.Frege* „Die Grundlagen der Arithmetik", [w:] GA, s. 440.

w XIX wieku, ale również w istotny sposób przyczynił się do rzeczywistego przeprowadzenia tej idei w praktyce badawczej. Ponieważ arytmetyzacja matematyki, jak stwierdzono powyżej, była warunkiem koniecznym sformułowania i przeprowadzenia idei logicyzmu, dlatego już w tym miejscu można stwierdzić, że G. Cantor był jednym z tych uczonych, którzy w istotny sposób przyczynili się do powstania kierunku logicyzmu w badaniach podstaw matematyki. Niemiecki matematyk poszedł jednak jeszcze dalej w tych swoich badaniach i stwierdzeniach, które nawiązują do programu logicyzmu.

Istotnym brakiem metodologicznej strony badań prowadzonych przez G. Cantora było nieuwzględnianie aksjomatyk teorii. Niemiecki matematyk zwykł był raczej traktować aksjomaty jako rodzaj dodatkowych założeń, które musiał czynić, by móc efektywnie kontynuować swoje prace. Nie stosował aksjomatyk jako zbiorów założeń teorii. Jego teoria mnogości była teorią przedaksjomatyczną[13]. G. Cantor, który stwierdzał możliwość systematyzacji, czyli arytmetyzacji całej matematyki XIX wieku, nie uwzględniał możliwości zaksjomatyzowania arytmetyki liczb naturalnych. A właśnie aksjomaty arytmetyki liczb naturalnych były później przez przedstawicieli logicyzmu traktowane jako aksjomaty całej usystematyzowanej matematyki. Ale mimo tego istotnego braku, niemiecki matematyk wpadł na pomysł, który bardzo upodobnił jego koncepcję matematyki do idei logicyzmu. Logicyści głosili tezę o możliwości wyprowadzenia całej matematyki — a więc w istocie aksjomatów arytmetyki i pojęć pierwotnych użytych w tej aksjomatyce — z twierdzeń i pojęć logiki. G. Cantor też twierdził, że arytmetyka liczb naturalnych, a w konsekwencji cała matematyka, jest wywiedlna z pewnej teorii. Pomysł G. Cantora różnił się — przynajmniej pozornie — od idei logicystów tym, że zaproponował on redukcję matematyki do stworzonej przez siebie teorii mnogości.

Po raz pierwszy swoje przekonanie o możliwości redukcji arytmetyki liczb naturalnych do teorii mnogości wypowiedział niemiecki matematyk w artykule, który napisał w roku 1884, a opublikowano go dopiero w roku 1970[14]. Wiązało się to z jego koncepcją zdefiniowania skończonych liczb naturalnych przy pomocy teoriomnogościowego pojęcia typu porządkowego. Stwierdził on, że każdy prosto uporządkowany zbiór ma określony typ porządkowy.

---

[13]Teorię mnogości podał w formie aksjomatycznej dopiero na początku XX wieku E. Zermelo.

[14]Por. G. Cantor, *Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, [w:] I. Grattan–Guiness, *An unpublished paper by Georg Cantor. Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung*, „Acta Mathematica” 89 (1970) Bd. 124, s. 65–107.

Typ porządkowy określał jako takie pojęcie ogólne, pod które podpadają wszystkie i tylko te zbiory, które są tak samo uporządkowane jak dany zbiór. Gdyby w podanej definicji zmienić termin „pojęcie ogólne" na „zbiór", wówczas można by otrzymać współczesną definicję typu porządkowego, a więc liczby porządkowej. Dalej G. Cantor wywodził, iż tak zdefiniowane typy porządkowe zbiorów skończonych są niczym innym, jak skończonymi liczbami naturalnymi[15].

Innymi słowy, niemiecki matematyk był przekonany, że znalazł modele dla skończonych liczb naturalnych w teorii typów porządkowych. Ważne było teraz umiejscowienie przez G. Cantora teorii typów porządkowych na ogólnym planie zależności dyscyplin naukowych. Stwierdził on, że teoria typów porządkowych jest częścią stworzonej przez niego teorii mnogości. To zaś prowadziło do niezwykle ważnego stwierdzenia, że cała matematyka jest niczym innym, tylko teorią mnogości[16]. Zatem, matematykę dało się w przekonaniu G. Cantora wyprowadzić z teorii mnogości.

Dla porównania koncepcji matematyki niemieckiego uczonego z ideą logicyzmu i sposobem realizacji tej idei ważne są dwa stwierdzenia:

1. matematyka da się wyprowadzić z teorii mnogości;
2. jest tak dlatego, ponieważ skończone liczby naturalne mają swoje modele w teorii typów porządkowych, zaś owa teoria jest częścią teorii mnogości.

Aby ujawnić podobieństwa koncepcji niemieckiego matematyka z ideą logicyzmu, należy w tym miejscu zaprezentować skrótowo sposób realizacji tej idei.

Po pierwsze, należy stwierdzić, że logicyści, inaczej niż G. Cantor, podkreślali wagę aksjomatyzacji teorii matematycznych (i logicznych). Dlatego inaczej potraktowali oni arytmetykę liczb naturalnych. Uwzględnili oni

[15] „Jede *einfach geordnete Menge* hat nun einen bestimmten *Ordnungstypus* oder, wie ich mich auch kürzer ausdrücken will, einen bestimmten *Typus*; darunter verstehe ich denjenigen *Allgemeinbegriff, unter welchem sämtliche der gegebenen geordn. Menge ähnliche geordnete Mengen, und nur diese, (folglich auch die gegebene geordnete Menge selbst) fallen*. Die *Typen* der *endlichen einfach geordneten Mengen* sind nichts Anderes, als die *endlichen ganzen Zahlen*, in Zeichen: $1, 2, 3, ..., \nu, ...$" — G. Cantor, jw. s. 87.

[16] „Sie [die allgemeine Typentheorie — J. D.] bildet einen wichtigen und grossen Theil der reinen Mengelehre (Theorie des ensembles), also auch der reinen Mathematik, denn letztere ist nach meiner Auffassung nichts anders als reine Mengelehre" — G. Cantor, jw. s. 84.

fakt, że w latach osiemdziesiątych XIX wieku arytmetyka liczb naturalnych została po raz pierwszy zaksjomatyzowana. Aksjomatyzacja tej teorii miała charakter odkrycia równoległego. Została ona przeprowadzona zarówno przez przyjaciela G. Cantora, R. Dedekinda[17], jak i przez włoskiego matematyka i logika G. Peano[18]. Uzyskane aksjomaty arytmetyki liczb naturalnych stanowiły ten właśnie zbiór aksjomatów matematycznych, z których cała matematyka XIX wieku była wywiedlna. Ta ostatnia teza wynika stąd, że matematyka tego okresu — jak to podkreślano wcześniej — została zarytmetyzowana. Dla realizacji programu logicyzmu wystarczyło teraz wykazać, że pojęcia pierwotne, występujące w aksjomatach arytmetyki, są definiowalne wyłącznie przy pomocy pojęć logicznych, zaś same aksjomaty są wyprowadzane z twierdzeń logicznych (mają swoje modele w teoriach logicznych).

G. Peano podał w swojej pracy następujące aksjomaty arytmetyki liczb naturalnych:

1. $0 \in Nn$;
2. $\prod_{k \in Nn}(Seq'k \in Nn)$;
3. $\prod_{k \in Nn}(Seq'k \neq 0)$;
4. $\prod_{k,m \in Nn}(Seq'k = Seq'm \ \rightarrow k = m)$;
5. $0 \in A \wedge \prod_{k \in Nn}(k \in A \rightarrow Seq'k \in A) \rightarrow \prod_{k \in Nn}(k \in A)$.

Pojęcia pierwotne tej aksjomatyki to pewien element, zbiór oraz funkcja. Wyróżnionym elementem jest liczba zero, zbiorem zbiór wszystkich liczb naturalnych, natomiast funkcją funkcja następnika[19]. Pojęcia pierwotne zostały w aksjomatyce oznaczone odpowiednio przez symbole: „0”, „$Nn$” oraz „$Seq'k$”[20].

[17]Por. R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, Bd. 3, Braunschweig 1932, s. 359–361; P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondaments des mathematiques*, Paris 1976.

[18]Por. G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino 1889.

[19]Funkcję następnika można w sposób intuicyjny rozumieć w sposób następujący: przypisuje ona danej liczbie naturalnej kolejną, większa od niej o 1 liczbę naturalną. I tak na przykład liczbie 5 przypisuje ta funkcja liczbę 6.

[20]Posłużono się tutaj symboliką proponowaną przez L. Borkowskiego [por. L. Borkowski, *Logika formalna*, Warszawa 1970, s. 233.].

Dla zrealizowania idei logicyzmu należało teraz zdefiniować wskazane trzy pojęcia pierwotne aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych przy pomocy pojęć logicznych, a następnie wyprowadzić aksjomaty z twierdzeń logiki.

Dla zdefiniowania wyróżnionego elementu, czyli zera oraz funkcji następnika niezbędne okazało się pojęcie liczby kardynalnej. Liczbę kardynalną zdefiniował w swoich pracach G. Frege. Dla jej określenia konieczne z kolei okazało się być pojęcie równoliczności zbiorów. Zbiory $A$ i $B$ są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja, która przyporządkowuje każdemu elementowi zbioru $A$ dokładnie jeden element zbioru $B$, i odwrotnie.

W pojęciu logicystów definicja równoliczności zbiorów zdefiniowana została jedynie przy pomocy zmiennych i stałych logicznych: stałych rachunku zdań, kwantyfikatorów i symboli rachunku zbiorów i relacji[21].

Zdefiniowanie równoliczności zbiorów prowadziło do określenia przez G. Fregego pojęcia liczby kardynalnej. Otóż relacja równoliczności zbiorów jest, jak łatwo zauważyć, relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią. Jest zatem również relacją równoważnościową. A więc dzieli zbiory zbiorów na niepuste i rozłączne klasy abstrakcji.

Liczba kardynalna to klasa abstrakcji relacji równoliczności zbiorów. Klasę abstrakcji wyznaczoną przez zbiór $A$ można oznaczyć symbolem „$Nc'A$”. Liczba kardynalna danego zbioru jest to zatem klasa abstrakcji relacji równoliczności wyznaczona przez ten zbiór, a więc jest to klasa wszystkich i tylko tych zbiorów, które są równoliczne z danym zbiorem[22].

Zdefiniowanie przez G.Fregego pojęcia liczby kardynalnej w kategoriach logicznych (rachunku zdań, predykatów, rachunku zbiorów i relacji) było wielkim osiągnięciem logicznym i filozoficznym. Pozwalało to od razu zdefiniować w kategoriach logicznych (rozumianych jak wyżej) dwa pojęcia pierwotne aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych. Chodzi o 0 oraz funkcję następnika. Zero jest liczbą kardynalną zbioru pustego. Natomiast $m$ jest

[21] To właśnie logicysta G. Frege po raz pierwszy zbudował aksjomatycznie rachunek zdań oraz rachunek kwantyfikatorów.

[22] G. Frege, który zdefiniował liczby kardynalne, nie mówił o równoliczności zbiorów, lecz o równoliczności pojęć (w sensie logicznym). Dwa pojęcia są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje relacja wzajemnie jednoznaczna, która przedmioty podpadające pod pierwsze pojęcie przyporządkowuje przedmiotom podpadającym pod drugie pojęcie. Liczbę (*Anzahl*), która przysługuje pojęciu $F$, określił G. Frege jako zakres pojęcia „równoliczne z pojęciem $F$”. 0 określił on jako liczbę, która przysługuje pojęciu „nieidentyczny z sobą”, to znaczy pojęciu, pod które nie podpada żaden przedmiot [por. L. Borkowski, jw. s. 236.].

następnikiem $k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m$ jest liczbą kardynalną pewnego zbioru $A$, zaś $k$ jest liczbą kardynalną zbioru powstającego ze zbioru $A$, przez wyłączenie z niego elementu $x$, który należy do zbioru $A$.

Trzeba w tym miejscu zaznaczyć, że pojęcie liczby kardynalnej nie było jedynym pojęciem logicznym (w rozumieniu tego słowa przyjętym przez logicystów), które wystarczyłoby do zdefiniowania terminów pierwotnych aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych. Logicyści, by zdefiniować pojęcie $Nn$ — zbioru wszystkich liczb naturalnych — musieli sięgnąć jeszcze do innego pojęcia, wypracowanego tym razem w ramach pewnej części teorii relacji, mianowicie w ramach teorii relacji ancestralnych. W ich ujęciu zbiór liczb naturalnych to najmniejszy zbiór, do którego należy liczba 0 i który zamknięty jest ze względu na relację następnika[23].

Po zdefiniowaniu wszystkich pojęć pierwotnych aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych można wykazać, że wszystkie aksjomaty są twierdzeniami teorii zbiorów i teorii relacji (w tym relacji ancestralnych)[24]. Tym samym arytmetyka liczb naturalnych, a w konsekwencji cała matematyka, może zostać sprowadzona do logiki w rozumieniu logicystów (rachunek zdań, predykatów, rachunek zbiorów i relacji).

Należy w tym miejscu zauważyć, że istotne znaczenie w tego rodzaju wyprowadzeniu matematyki z logiki odgrywa pojęcie liczb kardynalnych, które przez logicystów zostało zaliczone do zbioru pojęć logicznych. Pomysł logicystów w tym zakresie przypomina istotnie pomysł G. Cantora, który uważał, że przy pomocy pojęcia teoriomnogościowego typów porządkowych można wyprowadzić arytmetykę liczb naturalnych ze stworzonej przez niego teorii mnogości. Trzeba przede wszystkim podkreślić, że pojęcia liczby kardynalnej i typu porządkowego, który G. Cantor nazywał też „liczbą porządkową", są pojęciami bardzo do siebie zbliżonymi. Wystarczy wskazać na fakt, że typ porządkowy i liczba kardynalna zbiorów skończonych są sobie równe. Dopiero zbiory nieskończone o tych samych liczbach kardynalnych (mocach) mogą mieć różne typy porządkowe[25]. Poza tym G. Cantor dys-

[23]Logicyści w definicji zbioru wszystkich liczb naturalnych posługiwali się inną nieco terminologią. Nie mówili oni o „relacjach ancestralnych", lecz „własności dziedzicznej" (G. Frege) lub o „klasie dziedzicznej ze względu na relację $R$" (B. Russell) [por. L. Borkowski, jw. s. 236.].

[24]Por. L. Borkowski, jw. s. 232–242.

[25]Na przykład dwa zbiory $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, $\{1, 2, 3, ..., n, ..., a\}$ mają te same liczby kardynalne, lecz posiadają dwa różne, nieskończone typy porządkowe, odpowiednio: $\omega, \omega + 1$.

ponował również, podobnie jak logicyści, pojęciem liczby kardynalnej i był świadom związków łączących je z pojęciem liczby porządkowej[26].

Innymi słowy, niemiecki matematyk proponował sprowadzenie matematyki do teorii mnogości, przy pomocy podobnych środków jak te, których używali logicyści do sprowadzenia matematyki do logiki (w ich pojęciu). Istnieje jednak w tym wypadku zasadnicza różnica pomiędzy dokonaniami G. Cantora i logicystów. Twórca teorii mnogości podał jedynie pewną ideę — redukcji arytmetyki do teorii mnogości, przy pomocy pojęcia typu porządkowego. Natomiast logicyści nie tylko sformułowali spokrewnioną koncepcję, ale również starali się ją zrealizować. G. Cantor nie był w stanie przeprowadzić podanej przez siebie idei, ponieważ nie odwoływał się w swoich pracach do aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych, co z kolei uczynili przedstawiciele logicyzmu.

W tym momencie badań rodzi się następujące pytanie: skoro G. Cantor i logicyści mówili o sprowadzeniu matematyki do jakiejś bardziej podstawowej teorii i postulowali, by uczynić to przy pomocy podobnych środków — liczby porządkowej i liczby kardynalnej, to dlaczego różnili się wyborem samej teorii, do której matematyka miała być sprowadzona? Niemiecki matematyk mówił o teorii mnogości, natomiast logicyści o logice. Co więcej, G. Cantor zaliczał liczby kardynalne, którymi w realizacji swego programu posługiwali się logicyści, do pojęć teoriomnogościowych. Czy nie było zatem tak, że zarówno G. Cantor, jak i logicyści chcieli sprowadzić matematykę do tej samej teorii wyjściowej?

Odpowiedź na postawione pytanie zależy od tego, jak logicyści pojmowali termin „logika". Wspomniano już kilkakrotnie, że było to pojęcie dosyć szerokie. G. Frege zaliczał do logiki nie tylko terminy i prawa stworzonych przez siebie klasycznych rachunków zdań i predykatów, ale również terminy i prawa rachunku zbiorów[27] i relacji, w tym relacji ancestralnych. Co więcej, posługiwał się nimi, definiując w kategoriach tak rozumianej logiki pojęcia pierwotne aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych. Zdaniem L. Borkowskiego, jeśli teorię mnogości, czyli teorię zbiorów ujmuje się jako odrębną

---

[26] „*Mächtigkeit* oder *Kardinalzahl* von $M$ nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge $M$ hervorgeht, daßvon der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente $m$ und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird" — G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengelehre*, „Mathematische Annalen" 1895–1897, [w:] GA, s. 282 (282–256).

[27] Należy pamiętać o tym, że G. Frege nie posługiwał się w swoich pracach terminem „zbiór", lecz terminem „zakres pojęcia". Tym niemniej bardzo łatwo można przełożyć tę teminologię na język cantorowskiej teorii mnogości.

naukę, nie będącą działem logiki, to trzeba mówić o sprowadzeniu arytmetyki liczb naturalnych nie do logiki, lecz do teorii mnogości. W istocie zatem zarówno G. Cantor jak i G. Frege postulowali wyprowadzenie matematyki z tej samej teorii.

Jak się jednak okazało, przedaksjomatyczna teoria mnogości generowała antynomie[28]. Wobec tego należało tak ograniczyć przedaksjomatyczną teorię mnogości, by antynomie zostały wyeliminowane. W środowisku logicystów pracowali nad tym zagadnieniem B. Russell oraz A. N. Whitehead. W celu wyeliminowania antynomii stworzyli oni teorię typów[29]. Traktowali oni tę teorię jako element logiki. Z teorii typów, przy pomocy klasycznych rachunków zdań i predykatów, starali się oni wyprowadzić arytmetykę liczb naturalnych. Istotne dla prowadzonych tutaj dociekań jest to, że teoria typów, oprócz stałych logicznych, obejmowała tzw. funkcje propozycjonalne, które obiektom względnie predykatom przyporządkowywały odpowiednie sądy logiczne[30]. W istocie funkcje propozycjonalne zastępowały w teorii typów zbiory.

Zaś dla zrealizowania programu sprowadzenia matematyki do logiki (w zaproponowanym znaczeniu) B. Russell i A. N. Whitehead zmuszeni zostali do przyjęcia aksjomatów: abstrakcji, ekstensjonalności, pewnego ekwiwalentu aksjomatu wyboru oraz aksjomatu nieskończoności[31]. A te właśnie

[28]Warto w tym miejscu wskazać, że G. Cantor, najprawdopodobniej już w roku 1895, przed C. Buralim–Fortim [por. C. Burali–Forti, *Una questione sui numeri transfiniti*, „Circolo matematico di Palermo" 11 (1897), s. 154–164.] i przed B. Russellem odkrył pierwszą historycznie antynomię teoriomnogościową, czyli antynomię największej liczby porządkowej, nazwaną potem od nazwiska włoskiego matematyką, który opublikował ją po raz pierwszy. Twórca teorii mnogości zaproponował również jako pierwszy pewien sposób unikania antynomii. Miał on polegać na wyeliminowaniu zbiorów „zbyt mocnych", które jego zdaniem generowały antynomie [por. G. Cantor, *Listy do R. Dedekinda z 28.07.1899, 28.08.1899, 31.08.1899*, [w:] GA, s. 443–450.]. Pomysł ten został podjęty przez E. Zermelo w jego pierwszej aksjomatyce teorii mnogości. Inny sposób wybrali B. Russell i A. N. Whitehead, którzy w celu wyeliminowania antynomii stworzyli teorię typów.

[29]Teorię typów G. Fregego i A. N. Whiteheada należy odróżnić od teorii typów porządkowych stworzonej przez G. Cantora. Fragmentem tej ostatniej była teoria liczb porządkowych.

[30]Por. J. Perzanowski, jw. s. 94. Funkcja propozycjonalna to funkcja zdaniowa, posiadająca argumenty nazwowe.

[31]Por. tamże. B. Russell oraz A. N. Whitehead zdawali sobie sprawę z tego, że niektóre przynajmniej z wymienionych aksjomatów nie mają charakteru logicznego. Dotyczyło to na przykład aksjomatu nieskończoności, który stwierdzał między innymi istnienie nieskończonego zbioru indywiduów. Dlatego też nie sformułowali tego aksjomatu na początku swojej teorii, lecz dopisywali go za każdym razem, gdy był on niezbędny dla dowiedzenia

aksjomaty znalazły się w aksjomatyzowanej równolegle do powstającej teorii typów teorii mnogości. Zatem w istocie teorię typów B. Russella i A. N. Whiteheada można traktować jako (przynajmniej) fragment teorii mnogości. Tak więc w istocie angielscy badacze, realizując program logicyzmu, sprowadzili matematykę do teorii mnogości.

Wynika stąd bardzo istotny dla prowadzonych badań wniosek. Logicyści wypełnili postulat G. Cantora redukcji matematyki do teorii mnogości. Przy czym postulat G. Cantora z roku 1884 wyprzedził w istotny sposób jego realizacje przez logicystów na początku drugiego dziesięciolecia dwudziestego wieku.

Pogląd o możliwości wyprowadzenia matematyki z teorii mnogości, prezentowany przez niemieckiego matematyka, jest w niektórych współczesnych kręgach zajmujących się badaniem podstaw matematyki akceptowany. Nie akceptuje się natomiast poglądu logicystów o możliwości redukcji matematyki do logiki. Jest tak dlatego, ponieważ traktuje się teorię mnogości jako dyscyplinę nie zaliczającą się do logiki. Tym samym przekonanie G. Cantora, o wywiedlności matematyki z teorii mnogości, aczkolwiek wcześniejsze od poglądu logicystów, można uznać za nowocześniejsze, bliższe poglądom współczesnym.

Oczywiście pogląd o redukcji matematyki do teorii mnogości nie jest powszechnie akceptowany. Jest on współcześnie prezentowany przede wszystkim przez matematyków działających pod wspólnym pseudonimem N. Bourbaki[32]. Grupa ta podjęła się ukazania możliwości wyprowadzenia matema-

jakiegoś twierdzenia. L. Borkowski stwierdza: „Aksjomat nieskończoności rozumiany jako twierdzenie o istnieniu nieskończonej ilości indywiduów, budzi poważne obiekcje, z których zdawał sobie sprawę już Russell. Trudno zgodzić się z tym, by zdanie stwierdzające istnienie nieskończonej ilości indywiduów miało być tezą systemu logiki, i to w dodatku tezą przyjmowaną bez dowodu. Stwierdzenie faktu, że prawa arytmetyki są prawdziwe w każdej dziedzinie, skłoniło Fregego do podjęcia się sprowadzenia arytmetyki do logiki. Tymczasem budując arytmetykę liczb naturalnych w systemie logiki opartym na teorii typów z aksjomatem nieskończoności, dochodzimy do dziwnego wniosku, że jeśli istnieje tylko skończona ilość indywiduów, to pewne twierdzenia arytmetyki nie są prawdziwe" — L. Borkowski, jw. s. 296.

[32] A. Siemianowski dość bezproblemowo przyjmuje pogląd, że pojęcia wszystkich teorii matematycznych można zdefiniować za pomocą pojęć teorii mnogości. Taki pogląd nie był jednak akceptowany chociażby w szkole formalistycznej czy też w ramach kierunku konstruktywistycznego. Stanowisko prezentowane przez A. Siemianowskiego pozwala dość prosto ukazać podstawowy problem ontologii matematyki. Pytanie o naturę przedmiotów matematycznych zostaje zredukowane do pytania o naturę zbiorów. Często wyraża się tezę, że zbiór możliwych odpowiedzi na tak postawione pytanie równy jest zbiorowi możliwych rozwiązań proponowanych w średniowiecznym sporze o uniwersalia. Ostatecz-

tyki z teorii mnogości. Program ten jest jednak inaczej realizowany aniżeli postulował to G. Cantor czy logicyści. Nie traktuje się bowiem współcześnie arytmetyki liczb naturalnych jako teorii podstawowej, z której cała matematyka jest wywiedlna. Postrzega się raczej matematykę jako pewną kombinację struktur. Owe podstawowe struktury mają mieć charakter teoriomnogościowy. Do podstawowych struktur, z których zbudowana jest matematyka, miałyby się zaliczać: algebry abstrakcyjne, porządki oraz topologie[33].

Należy w tym miejscu podsumować przeprowadzone badania. Wydaje się, że w ostatecznej konkluzji należy podkreślić, iż G. Cantor antycypował ideę logicyzmu, prezentowaną przez prawie współczesnego mu G. Fregego oraz przez młodszych o jedno pokolenie B. Russella i A. N. Whiteheada. Nie tylko reprezentował on pogląd o możliwości usystematyzowania matematyki, ale przyczynił się istotnie do przeprowadzonej w XIX wieku jej arytmetyzacji. Jego dorobek polegał na znalezieniu modelu teorii liczb rzeczywistych w dziedzinie liczb wymiernych. Istotnym mankamentem prac G. Cantora było to, że nie posługiwał się on — jak logicyści — aksjomatyką arytmetyki liczb naturalnych. Aksjomatyka ta stanowiła bowiem równocześnie zbiór aksjomatów całej zarytmetyzowanej matematyki. G. Cantor, podobnie jak logicyści, był przekonany o możliwości zredukowania zarytmetyzowanej matematyki do teorii bardziej podstawowej. W jego przekonaniu ową teorią miała być teoria mnogości, natomiast w przekonaniu logicystów logika. Zdaniem niemieckiego matematyka w wyprowadzeniu matematyki z logiki należało się posłużyć się teoriomnogościowym pojęciem typów porządkowych. Logicyści, realizując swój program, definiowali pojęcia podstawowe aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych przy pomocy pokrewnego pojęcia liczby kardynalnej. Należy mocno podkreślić, że G. Cantor zaprezentował jedynie ideę redukcji matematyki do teorii bardziej podstawowej. Nie posługując się aksjomatyką arytmetyki, nie był w stanie tego programu zrealizować. Natomiast logicyści zrealizowali swój pomysł wyprowadzenia matematyki dziewiętnastowiecznej z logiki. Była to jednak logika specyficznie rozumiana. Teoria typów B. Russella oraz A. N. Whiteheada zawierały

nie zatem w ontologii matematyki można by stać na stanowisku realizmu skrajnego, realizmu umiarkowanego, konceptualizmu bądź też nominalizmu [por. A. Siemianowski, *Metodologia nauk*, [w:] *Filozofia a nauka. Zarys encyklopedyczny*, Wrocław 1987, s. 362 (357–365).].

[33]Niektórzy współcześni przedstawiciele konstruktywizmu też skłonni są twierdzić, że przedmiot matematyki stanowią czyste struktury, które powstały dzięki aktywności umysłu. Do wspomnianych struktur zaliczają oni również algebry abstrakcyjne, porządki i topologie.

niektóre aksjomaty teoriomnogościowe. Zatem można traktować tę teorię jako (przynajmniej) fragment teorii mnogości. Tak więc ostatecznie — jeśli potraktuje się teorię mnogości jako dyscyplinę nie należącą do logiki — można twierdzić, że logicyści zrealizowali pomysł G. Cantora redukcji matematyki dziewiętnastowiecznej do teorii mnogości. Współcześnie nie mówi się o redukowalności matematyki do logiki. Natomiast uczeni związani z grupą matematyków występujących pod pseudonimem N. Bourbaki, starają się zrealizować program wyprowadzenia całej matematyki współczesnej z teorii mnogości.