ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXIII / 1998, s. 53–66*

Krzysztof WÓJTOWICZ

O MATEMATYCE I FILOZOFII MATEMATYKI

W ostatnich latach obserwujemy ożywienie dyskusji dotyczącej filozofii matematyki. Pojawia się coraz więcej artykułów na ten temat, ukazują się także coraz liczniejsze książki, jakby chociażby *Science Without Numbers* Hartry'ego Fielda, *Constructability and Mathematical Existence* Charlesa Chihary, *Realism in Mathematics* Penelope Maddy, *Mathematics Without Numbers* Geoffrey'a Hellmana i szereg innych. Po okresie pewnej stagnacji następuje, jak się wydaje, „siedem tłustych lat" filozofii matematyki.

Warto dlatego zatrzymać się przy problemie, jaki jest charakter związków pomiędzy filozofią matematyki a samą matematyką, jakiego typu związki czy inspiracje tu występują i jakie są perspektywy rozwoju filozofii matematyki.

Zaczniemy od kilku uwag historycznych. Początki matematyki współczesnej wiąże się najczęściej z nazwiskiem twórcy teorii mnogości Georga Cantora. Dla Cantora tworzona przez niego teoria mnogości (w szczególności teoria nieskończoności) miała charakter filozoficzny. Badanie zbiorów nieskończonych było dla Cantora badaniem realnie istniejącej rzeczywistości; jego rozróżnienia różnych poziomów nieskończoności, inspirowane rozważaniami natury religijnej i metafizycznej (patrz np. [Murawski 1984]) miały zasadnicze znaczenie dla tworzonej przez niego teorii mnogości. Dla Cantora kwestie matematyczne i filozoficzne były ze sobą ściśle związane.

Na przełomie wieków dyskusje filozoficzne nie były wśród matematyków rzadkością. Przyjmijmy, że trwały jeszcze wówczas spory dotyczące pojęcia dowodu matematycznego — niektórzy matematyce (jak np. Kronecker) odrzucali niekonstruktywne dowody istnienia jako niedopuszczalne (słynna jest wypowiedź jednego z matematyków niemieckich na temat pewnego niekonstruktywnego dowodu Hilberta: *To nie jest matematyka! To jest teologia*).

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

Także pewnik wyboru — właśnie ze względu na swój niekonstruktywny, czysto egzystencjalny charakter — był kwestionowany, zanim ostatecznie okazał się być na tyle ważnym narzędziem, że dzisiaj matematycy posługują się nim bez ograniczeń.

Także nurt intuicjonistyczny (zainicjowany przez Brouwera na początku naszego stulecia) inspirowany był filozoficznymi tezami dotyczącymi istnienia i natury obiektów matematycznych. Dla konceptualistów obiekt matematyczny nie istnieje dopóty, dopóki nie zostanie skonstruowany. Z ontologicznej tezy konceptualizmu wynika szereg ograniczeń metodologicznych, dotyczących dopuszczalnych metod dowodowych. W szczególności, jak pamiętamy, intuicjoniści nie dopuszczali niekonstruktywnych dowodów istnienia, opartych na zasadzie wyłącznego środka. Wybór pewnej opcji filozoficznej inspirował ich do tworzenia „innej" matematyki, jaką jest matematyka intuicjonistyczna.

Przypomnijmy tu także krótko poglądy filozoficzne Kurta Gödla, najwybitniejszego logika XX wieku. Gödel był realistą, przekonanym o obiektywnym istnieniu przedmiotu badań matematyki — miały być nim pewne abstrakcyjne, niezależne od naszej działalności poznawczej obiekty. Matematyk, według Gödla, opisuje pewną zastaną rzeczywistość matematyczną, nie tworząc jej. Realistyczne poglądy Gödla stanowiły inspirację dla jego twórczości matematycznej. Sam mówił o sobie, że oparcie się na realistycznej koncepcji matematyki pozwoliło mu na swobodne korzystanie z niekonstruktywnych metod (w szczególności chodzi o definicje niepredykatywne), ignorując zastrzeżenia wysuwane przez konstruktywistów (por. [Wang 1974, 9]). Pomiędzy filozoficznymi poglądami Gödla a jego twórczością matematyczną istniał zatem związek merytoryczny.

Przykłady te wskazują na to, że na pewnym etapie rozwoju matematyki analizy filozoficzne odegrały w niej istotną rolę. Można zastanawiać się, na ile kontrowersje te miały charakter *stricte* filozoficzny, dotyczący np. istnienia obiektów matematycznych, intuicji matematycznej etc., a na ile charakter sporów metodologicznych, dotyczących stworzenia pewnych, ogólnie akceptowanych ram dla działalności matematycznej[1]. Niemniej jednak z całą pewnością „komponenta filozoficzna" nie była tu zerowa i pełniła rolę nie tylko heurystyczną.

[1]Na przykład o powszechnym zaakceptowaniu pewnika wyboru zadecydowała jego użyteczność, jako silnego narzędzia dowodzenia twierdzeń, nie filozoficzne analizy dotyczące istnienia selektora. Na użyteczność pewnika wyboru jako argument za jego zaakceptowaniem wskazywał już Zermelo na początku stulecia.

Relacja między matematyką a filozofią jest dziś inna. Matematycy w zasadzie nie interesują się filozofią matematyki. Dla przeciętnego matematyka rozważania filozoficzne dotyczące statusu ontologicznego przedmiotów matematycznych czy przyczyn, dla których matematykę można stosować do opisu rzeczywistości nie są istotne ani interesujące. Na pewno nie mają one znaczenia dla jego pracy — badając proces stochastyczny czy równanie różniczkowe, matematyk nie zastanawia się, czy właśnie ten proces stochastyczny stworzył, czy też istnieje on niezależnie od jego badań. Wśród matematyków panuje powszechna zgoda co do tego, czym jest poprawny dowód matematyczny, z jakich założeń wolno korzystać, etc. Specjalista w zakresie matematyki stosowanej nie zastanawia się nad tym, jak to się dzieje, że tworzone przez niego modele nadają się do opisu rozwoju szczepu bakterii czy zachowania inwestorów giełdowych — on tworzy modele i zadowala się faktem, że są one użyteczne. Pytanie „jak”, jest dla niego zdecydowanie ważniejsze, niż pytanie „dlaczego”[2]. „W pracy” matematyk nie zaprząta sobie głowy roztrząsaniem problemów filozoficznych. Co więcej, na ogół nie czyni tego także w wolnym czasie. Matematycy rzadko zabierają głoś w dyskusjach filozoficznych, traktując je zazwyczaj jako niepoważne, niekonkluzywne i jałowe[3]. Ci (nieliczni) matematycy, którzy interesują się pytaniami filozoficznymi, sami przyznają, że większość matematyków niechętna jest dyskusjom filozoficznym. Są oni na ogół „platonikami w dni robocze, a formalistami w niedzielę” — w czasie pracy zachowują się tak, jakby badali istniejące obiekty, natomiast „przyciśnięci do muru” chętnie deklarują się jako formaliści, aby unikać mętnych, ich zdaniem, dyskusji filozoficznych. Jean Diedonne — sam będąc matematykiem — pisze o matematykach, iż „[...] w zasadzie wierzymy w rzeczywistość matematyki, ale rzecz jasna, że kiedy filozofowie atakują nas swoimi paradoksami, to pospiesznie zasłaniamy się formalizmem i mówimy ‘matematyka jest tylko

---

[2]Shapiro w jednej ze swoich prac wspomina sytuację, kiedy student zapytał prowadzącego wykład o przyczynę pewnego zjawiska fizycznego. W odpowiedzi prowadzący wypisał całkę, która dla pewnej wartości parametru się zeruje. Dla fizyka wyjaśnienie to w zupełności wystarcza (dzięki temu może twórczo pracować w dziedzinie fizyki!) filozof natomiast chciałby wiedzieć, jak to możliwe, że zerowanie się jakiejś całki wyjaśnia zjawisko obserwowane w otaczającym nas świecie fizycznym.

[3]Davis i Hersh w swej książce [1994] przytaczają żartobliwe dialogi prowadzone między Idealnym Matematykiem a różnymi rozmówcami. Idealny Matematyk stwierdza w pewnym momencie, że filozofia go nudzi, gdyż są to „rozważania i rozważania, które do niczego nie prowadzą. Moje zadanie polega na dowodzeniu twierdzenia, a nie na martwieniu się, co one znaczą”. Autorzy stworzyli ten dialog na podstawie własnego doświadczenia — sami są matematykami i te poglądy uznają za typowe dla swoich kolegów po fachu.

kombinacją symboli pozbawionych znaczenia'. [...] W końcu zostawiają nas w spokoju, a wówczas wracamy do naszej matematyki, i robimy to, co robiliśmy zawsze, z poczuciem, które ma każdy matematyk, że pracujemy nad czymś rzeczywistym" (cyt. za [Davis, Hersh 1994, 281]). Podobnie Yannis Moschovakis, wybitny specjalista w zakresie deskryptywnej teorii mnogości twierdzi, że olbrzymia większość matematyków żywi przekonanie, że bada „prawdziwe obiekty", które mają pewne wewnętrzne własności niezależne od tego, czy ktoś o nich w danej chwili myśli czy nie. Moschovakis pisze jednak, iż: „[...] próby uczynienia z tego typu przekonań spójnego systemu filozoficznego prowadzą do dyskusji na temat 'istnienia obiektów abstrakcyjnych', którym matematycy są niechętni. Stanowisku formalistycznemu można nadać elegancką, spójną postać, wolną od tych trudności, co jest głównym powodem, dla którego wielu matematyków twierdzi, że są formalistami (kiedy się ich 'przyciśnie'), podczas gdy w czasie pracy zachowują się jak niczym nie zaniepokojeni realiści" ([Moschovakis 1980, 605–606]). Na pytanie o fenomen stosowalności matematyk odpowiada standardowo, że matematyka dostarcza pewnych modeli, które dają się stosować, bo taka jest rzeczywistość.

Typowy matematyk, jeśli już zabiera głos w dyskusjach filozoficznych, to jego wypowiedzi mają raczej charakter refleksji natury estetycznej, dotyczących piękna teorii matematycznych, głębi wyników, tajemniczej natury związków pomiędzy poszczególnymi działami matematyki oraz matematyką a rzeczywistością. Typowym przykładem może tu być słynna wypowiedź Wignera: *Stosowalność języka matematyki do formułowania praw fizyki jest cudownym darem, którego nie rozumiemy, ani na który nie zasługujemy* ([Wigner 1960]), która wprawdzie brzmi efektowanie, ale nic nie wyjaśnia (ani nawet nie próbuje wyjaśnić!).

Głos w dyskusjach filozoficznych zabierają zatem w zasadzie wyłącznie filozofowie. Zdani są (niestety!) na własne siły. Oczywiście, „zawodowy filozof" znacznie lepiej niż matematyk zna tradycję filozoficzną, stanowiska i argumenty, jakie są formułowane. Lepiej niż matematyk widzi, które ze stawianych problemów są przeformułowaniami tradycyjnych problemów filozoficznych, a które mają własną specyfikę i nie redukują się do klasycznych zagadnień. Matematyk na ogół słabo zna historię i literaturę filozoficzną. Tu jednak kończy się przewaga filozofa. Często dzieje się bowiem tak, że filozof matematyki (czy ogólniej: filozof nauki) niedostatecznie zna przedmiot swoich analiz.

Pojawia się tu problem, na ile szczegółowa znajomość wyników technicznych jest istotna dla filozofa i czy w ogóle jest istotna. Można tu wyróżnić dwa zasadnicze stanowiska i dwie zasadnicze linie argumentacji:

1. Taka wiedza nie jest niezbędna. Pytania dotyczące filozofii matematyki są po prostu uszczegółowieniami (czy inaczej — szczególnymi przypadkami) tradycyjnych pytań filozoficznych. Np. pytanie o naturę i status ontologiczny obiektów matematycznych jest szczególnym przypadkiem pytania o istnienie obiektów abstrakcyjnych. Pytanie o to, w jaki sposób matematyka stosuje się do opisu rzeczywistości, jest szczególnym przypadkiem pytania o to, w jaki sposób tworzone przez nas schematy pojęciowe mogą stosować się do opisu rzeczywistości. Także inne pytania filozoficzne, dotyczące matematyki, zwolennik tego stanowiska uzna za przeformułowania ogólniejszych, tradycyjnych problemów. Szczegółowa wiedza dotycząca twierdzeń matematycznych nie jest, według niego, niezbędna, aby taką dyskusję prowadzić: istotna jest znajomość tradycji filozoficznej.

2. W myśl drugiego stanowiska, taka wiedza jest niezbędna. Jest prawdą, że pytania filozoficzne dotyczące matematyki są w taki czy inny sposób zakorzenione w tradycji i nią inspirowane, ale mają własną specyfikę. Dlatego znajomość — niekiedy nawet szczegółowa — wyników technicznych ma zasadnicze znaczenie dla filozofa matematyki. W przeciwnym razie pojawia się niebezpieczeństwo błędnych interpretacji czy nawet nadużyć.

Zdecydowanie bliższe jest nam drugie stanowisko. Nie będziemy go tu szczegółowo uzasadniać, podamy jedynie w luźnej formie kilka przykładów na poparcie tej tezy.

I. Podstawową (najbardziej ogólną) teorią matematyczną jest teoria mnogości. Formalizuje ona nasze preteoretyczne pojęcie zbioru i nasze intuicje dotyczące relacji należenia. Jednym z problemów filozoficznych związanych z teorią mnogości jest problem uzasadniania aksjomatów, poszukiwania dla nich wiarygodnych racji. Nie będziemy tu wchodzić szczegółowo w te zagadnienia; wystarczy przypomnieć problem niezależności licznych zdań dotyczących dużych liczb kardynalnych, hipotezy *continuum*, aksjomatu determinacji etc. Także np. analiza problemu relatywności pojęć teoriomnogościowych (na który zwracał uwagę Skolem w latach 20–tych) wymaga podstawowej wiedzy na temat modeli dla teorii mnogości.

II. Przypomnijmy dyskusję pomiędzy zwolennikami „tezy o logice pierwszych rzędów” a jej przeciwnikami. Zwolennicy (w tym Quine, Gödel, Skolem) twierdzą, że teorie matematyczne winny być formułowane w języku predykatów pierwszego rzędu. Przeciwnicy twierdzą, że należy dopuścić także silniejsze logiki, w tym także logikę drugiego rzędu. Obie strony posługują się w tym sporze argumentami odwołującymi się do metamatematycznych własności systemów formalnych jak również do praktyki matematycznej. Dla zrozumienia tego problemu i argumentów konieczna jest znajomość logiki i metamatematyki na przynajmniej elementarnym poziomie[4].

III. „Inwazja” metod stochastycznych do zastosowania matematyki[5] powoduje, że stawiane jest na nowo pytanie o naturę losowości, o relacje pomiędzy procesami losowymi a deterministycznymi, o determinizm i indeterminizm. Pojawia się problem rozumienia czasu i roli jaką odgrywa w opisywanych przez matematykę procesach fizycznych. Widoczne jest to także na przykładzie tak ostatnio modnej i głośnej teorii chaosu. Aby zrozumieć te zależności konieczna jest znajomość wyników technicznych, w przeciwnym razie badaczowi grozi powtarzanie sloganów za piszącymi sensacyjne teksty dziennikarzami.

IV. Badania w zakresie sztucznej inteligencji także prowokują do stawiania na nowo tez filozoficznych dotyczących natury umysłu, czy klasycznego problemu *mind–body*. Stosunkowo nowym zagadnieniem, wymagającym analizy jest status dowodów komputerowych (czy, mówiąc ściśle: wspomaganych komputerowo). Także tutaj ważna jest znajomość wyników technicznych, zwłaszcza tych dotyczących metamatematycznych ograniczeń automatów, jakimi są komputery. Refleksja filozoficzna, oparta na znajomości teorii obliczeń i teorii funkcji rekurencyjnych (a także innych działów logiki matematycznej, jak np. teorii modeli skończonych czy logik niestandardowych) pozwala na bardziej spokojne i rzeczowe podejście do sensacyjnych doniesień na temat możliwości skostruowania myślącego robota.

V. Jednym z tradycyjnych pytań filozoficznych jest pytanie o naturę nieskończoności. W matematyce nieskończoność występuje na porządku dziennym. Finistyta, który jednocześnie chce być realistą, musi uczciwie zdać sprawę z tego faktu. Aby to uczynić, konieczna jest znajomość tego, w jaki sposób metody infinistyczne „ingerują” w opis naszego skończonego świata i jaka jest natura tej ingerencji. W szczególności musi on dobrze wiedzieć, w jakich działach matematyki (i dla udowodnienia jakich twierdzeń) odwołuje się do metod infinitystycznych; na ile metody te są eliminowalne, etc.

[4]Czytelnika zainteresowanego tą dyskusją odsyłam do monografii [Shapiro 1991].

[5]Prof. Andrzej Lasota w referacie na krakowskim sympozjum w roku 1995 wyraził opinię, że teoria prawdopodobieństwa staje się jedną z głównych gałęzi przyrodoznawstwa, zaś reszta matematyki stanowi dla niej naukę pomocniczą. Czytelnika odsyłam do tomu [Heller, Urbaniec 1996].

Nie jest to bynajmniej problem sztuczny — aby się dowiedzieć, które niedowodliwe w arytmetyce Peano (a więc w teorii finitystycznej) zdania są prawdziwe w standardowym modelu dla liczb naturalnych (czyli w „prawdziwych liczbach naturalnych": $1, 2, 3, ...$) musimy odwoływać się do infinitystycznych technik teoriomnogościowych. To samo dotyczy szeregu kwestii kombinatorycznych, dotyczących skończonych obiektów takich jak grafy, drzewa, etc.[6].

VI. Dyżurnym tematem wśród filozofów matematyki jest twierdzenie Gödla. Wstyd przyznać, ale niekiedy (na szczęście rzadko) pojawiają się wypowiedzi, z których wynika, że ich autor nie do końca zna sformułowanie tego twierdzenia, a dowodu nigdy nie widział na oczy. Zważywszy, w jak sensacyjnej „otoczce" (Twierdzenie Gödla a Tajemnica Bytu, Twierdzenie Gödla a Niepoznawalność Ostatecznej Przyczyny, etc.) bywa prezentowane to zagadnienie, skrupulatność i dokładna znajomość kwestii technicznych jest tu niezbędna.

VII. Wiadomo, że program Hilberta w oryginalnym sformułowaniu nie może być przeprowadzony ze względu na metamatematyczne własności systemów formalnych. Można jednak zastanawiać się nad możliwościami jego realizacji w ograniczonym zakresie (por. referat prof. Romana Murawskiego na krakowskiej konferencji w 1996). Możemy wyróżnić tu jakby dwa kierunki badań:

— jak silne metody są potrzebne dla dowodzenia niesprzeczności;

— jakie fragmenty matematyki infinitystycznej mogą być ugruntowane na bazie metod finitystycznych.

Ważnym nurtem badań w tym zakresie jest tzw. *matematyka odwrotna*, w ramach której badane jest, jak silne aksjomaty istnienia zbiorów są potrzebne dla dowodzenia klasycznych twierdzeń matematycznych. Okazuje się bowiem, że wśród twierdzeń (takich jak np. twierdzenie Bolzano–Weierstrassa, Arzeli–Ascoliego, Baire'a, Hahna–Banacha, Banacha–Steinhausa, Cauchy'ego i innych klasycznych twierdzeń) można wprowadzić pewien porządek w zależności od tego, jak silny system aksjomatyczny potrzebny jest, aby to twierdzenie udowodnić. Siła tego systemu mierzona jest tym, dla jak bogatej rodziny formuł zakładamy aksjomat wyróżniany, czyli istnienia odpowiednio definiowalnych zbiorów[7].

[6] Czytelnika zainteresowanego tymi zagadnieniami odsyłamy np. do [Wójtowicz 1996].

[7] Czytelnika zainteresowanego problematyką matematyki odwrotnej i jej roli w programie Hilberrta odsyłamy np. do [Murawski 1993].

VIII. Ważnym argumentem na rzecz stanowiska realistycznego jest argument z niezbędności Quine'a. Nie wnikając w szczegóły, argument ten opiera się na tezie, że teorie naukowe stanowią pewną całość (niejako takim „kwantem" sensu empirycznego jest teoria, a nie poszczególne zdania tej teorii) i musimy konsekwentnie przyjąć całościową ontologię. Quine twierdzi, że zobowiązania ontologiczne zaciągamy poprzez zdania egzystencjalne (tj. z kwantyfikatorem egzystencjalnym).

Jeśli zatem w naszych teoriach fizycznych opieramy się na pewnym instrumentarium matematycznym (np. jakimś fragmencie analizy rzeczywistej, teorii liczb, teorii mnogości etc.), to filozoficznie istotne jest ustalenie, jakiego typu zobowiązania ontologiczne „w świecie obiektów matematycznych" zaciąga ta teoria. Tego typu analizy można prowadzić w oparciu o matematykę odwrotną, o której była już mowa. W ramach matematyki odwrotnej badamy, jak silne aksjomaty istnienia zbiorów potrzebne są do udowodnienia danego twierdzenia, czyli dla „przygotowania" instrumentarium dla teorii fizycznej. Jeśli zatem ustalimy, że w ramach danej teorii fizycznej posługujemy się instrumentarium matematycznym (pojęciami i twierdzeniami), dla sformułowania i udowodnienia których potrzebne są takie czy inne aksjomaty istnienia zbiorów, to możemy bardziej precyzyjnie przeanalizować problem zobowiązań ontologicznych tej teorii, stopnia abstrakcji stosowanych w niej pojęć matematycznych, etc.[8].

Przykłady te wskazują na to, że analizy filozoficzne dotyczące matematyki *bez* znajomości matematyki mogą być prowadzone co najwyżej na bardzo ogólnym poziomie, bez możliwości podjęcia kwestii szczegółowych. Będą to z konieczności rozważania pomijające specyficzne dla matematyki współczesnej problemy i trudności filozoficzne. Rzetelna analiza wymaga z całą pewnością pewnego minimum wiedzy matematycznej. W przeciwnym razie pojawia się niebezpieczeństwo „elementaryzmu", polegającego na tym, że filozof odwołuje się jedynie do elementarnych pojęć i wyników analizowanej przez siebie nauki. Badając np. problem zastosowań będzie odwoływał się jedynie do technik matematycznych na poziomie tabliczki mnożenia, ignorując (z braku wiedzy) problemy trudniejsze i bardziej subtelne[9]. Badając problem uzasadnień dla aksjomatów teorii mnogości ograniczy się do naj-

[8] Czytelnika zainteresowanego argumentem z niezbędności Quine'a i zastosowaniem matematyki odwrotnej do tego typu analiz odsyłam do [Wójtowicz 1995].

[9] Być może filozoficznie nie ma istotnej różnicy pomiędzy zastosowaniem tabliczki mnożenia do obliczeń w sklepie a zastosowaniem analizy funkcjonalnej w mechanice kwantowej. Tę (wielce wątpliwą) tezę jednak można byłoby uzasadnić dopiero po rzetelnej analizie, której „elementarysta" przeprowadzić nie jest w stanie.

prostszych zdań teoriomnogościowych, ignorując kwestie związane np. z aksjomatem determinacji, aksjomatem konstruowalności, aksjomatami dużych liczb kardynalnych.

Pojawia się problem, jak szeroki musi być zakres wiedzy, którą powinien opanować filozof matematyki zanim zabierze się do swej pracy. Problem nie jest banalny, chociażby z racji daleko postępującej specjalizacji, (jak to ujął kiedyś ks. Michał Heller: „Specjalista od skał magmowych czuje się osamotniony wśród specjalistów od skał osadowych"). Nie można oczywiście poznać „całej matematyki" — ostatnim człowiekiem, który podobno orientował się w najważniejszych kierunkach badań, był Hilbert. Von Neumann pod koniec lat 40–tych oceniał, że dobry matematyk jest w stanie znać ok. 10% matematyki. Od tego czasu minęło kilkadziesiąt lat i dzisiaj, w okresie wykładniczego wzrostu ilości publikacji i wyników, nie można nawet o tym marzyć. Logik nie ma pojęcia o geometrii różniczkowej, a specjalista od metod numerycznych wie o teorii mnogości tylko tyle, że pojawia się tam pożyteczny lemat Kuratowskiego–Zorna. Jest to zrozumiałe i nieuniknione; kierunek ewolucji jest tu oczywisty[10].

Problem „matematycznego minimum" ma jednak znacznie głębsze podłoże, niż tylko socjologiczne. Dotyczy bowiem tego, które z problemów filozoficznych, jakich dostarcza nam matematyka, są dla nas szczególnie ważne. Wobec różnorodności tych zagadnień, aktualności nabiera pytanie, czy jest ciągle jeszcze możliwe uprawianie „jednej całościowej filozofii matematyki", czy i tutaj nie jest nieunikniona specjalizacja. Wydaje się to być prawdopodobne. Być może zatem niedługo zamiast mówić o filozofii matematyki będziemy mówić o filozofii teorii mnogości, filozofii teorii chaosu, filozofii sztucznej inteligencji, etc. Każda z tych dziedzin miałaby swoją specyfikę, swój wąski przedmiot badań, i wymagałaby nieco innego przygotowania formalnego[11].

Jeśli przyjmiemy tę roboczą klasyfikację, to możemy pokusić się o prowizoryczne określenie (na kilku przykładach), czym interesowaliby się spe-

[10]Davis i Hersh podają za Ulamem, że obecnie publikuje się ok. 200000 (dwieście tysięcy!) twierdzeń matematycznych rocznie. Klasyfikacja matematyki z roku 1868 obejmowała 38 poddziedzin, klasyfikacja z roku 1979 roku obejmuje ok. 3400 poddziedzin (por. [Davis Hersh 1994]).

[11]Nie jest naszym celem mnożenie dystynkcji pojęciowych. Posłużenie się terminem „filozofia teorii mnogości" czy „filozofia teorii prawdopodobieństwa" nie ma sugerować, że oto pojawiają się jakieś zupełnie nowe dyscypliny filozoficzne, mają one charakter porządkujący; wprowadzenie tych określeń ma na celu zwrócenie uwagi na bogactwo i różnorodność poruszanych problemów.

cjaliści w tych dziedzinach i jakie instrumentarium formalne byłoby dla nich użyteczne.

Filozof teorii mnogości będzie interesował się sposobami uzasadniania aksjomatów teorii mnogości, metodologią poszukiwania „rozsądnych" wzmocnień teorii mnogości, będzie analizował argumenty na rzecz np. aksjomatu konstruowalności czy „wiarygodności" hipotezy *continuum* etc. Ciekawy będzie dla niego problem, na ile matematyczne (teoriomnogościowe) pojęcie zbioru „ufundowane" jest w naszym zdroworozsądkowym rozumieniu zbioru jako np. ekstensji własności. Będzie dla niego interesujące, jakie są relacje pomiędzy „czystą" teorią mnogości, a teorią mnogości z atomami, (których rolę mogą odgrywać obiekty fizyczne), a którą można interpretować np. jako formalną teorię powszechników. Ważny byłby dla niego także problem, czy relatywność pojęć teoriomnogościowych ma jakieś implikacje dla tezy realizmu i czy implikacje, że pojęcie zbioru nie jest do końca sensowne i doprecyzowane[12].

Dla filozofa sztucznej inteligencji kwestie niezależności zdań dotyczących dużych liczb kardynalnych będą miały zerowe znaczenie. Ważne natomiast będą dla niego wyniki dotyczące struktury klasy funkcji rekurencyjnych, obliczalności, relacji pomiędzy klasami złożoności obliczeniowej a różnego typu logikami (badane w ramach skończonej teorii modeli), wyniki dotyczące metamatematycznych ograniczeń dotyczących rozstrzygalności etc.

Dla filozofa, zajmującego się problemem, jaka logika jest najwłaściwsza dla formalizowania rozumowań matematycznych (i ogólniej: naukowych) ważna będzie znajomość metalogicznych własności najrozmaitszych logik, zarówno logiki pierwszego, jak i drugiego rzędu, ale także całego spektrum logik nieklasycznych, takich jak logiki z dodatkowymi kwantyfikatorami, logiki z nieskończonymi wyrażeniami, etc., badanych w ramach tzw. „abstrakcyjnej teorii modeli" (por. [Barwise Feferman 1985]). Istotne tu będą kwestie wzajemnej interpretowalności pojęć, „wbudowanych" w odpowiednie nieelementarne logiki; siły wyrażeniowej tych logik, kwestie rozstrzygalności, zagadnienia semantyczne (np. czy zachodzi twierdzenie o zwartości, twierdzenia Skolema–Löwenheima), klasyfikacja logik i ich „mapa", tzn. znajomość twierdzeń klasyfikacyjnych w rodzaju twierdzenia Lindströma, etc. Nie bę-

[12] Maddy utożsamia (choć nie stwierdza tego *explicite*) filozofię matematyki z filozofią teorii mnogości. Jej analizy epistemologiczne i ontologiczne dotyczą wyłącznie teorii mnogości. W artykule dotyczącym perspektyw filozofii matematyki ([Maddy 1991]), za najważniejsze zadanie filozofii matematyki uznaje kwestię badania wiarygodności i uzasadnień dla aksjomatów teorii mnogości.

dzie natomiast istotne, jakie są np. teoretyczne ograniczenia na szybkość algorytmów sortowania.

Dla filozofa zajmującego się problemem natury stochastycznego *versus* deterministycznego opisu zjawisk fizycznych ważna będzie znajomość wyników np. teorii procesów stochastycznych, teorii ergodycznej czy teorii układów dynamicznych (teorii chaosu). Interpretacja np. wyników dotyczących np. aproksymowania procesów losowych procesami deterministycznymi, czy istnieniu „uniwersalnego" procesu deterministycznego, który w wyniku rzutowania na podprzestrzeń daje dowolną trajektorię losową wymaga rzetelnej wiedzy[13]. Natomiast znajomość np. metalogicznych własności logiki $L(Q_0)$ [14] nie będzie dla niego w ogóle istotna.

Przykłady te sugerują, że tak jak w naukach szczegółowych następuje daleko idąca specjalizacja, to tego typu specjalizacja następować będzie (i faktycznie następuje) także w ramach już — wydawałoby się — wyspecjalizowanego działu filozofii, jakim jest filozofia matematyki. Jeśli specjalizacja ta będzie opierać się na rzetelnej znajomości przedmiotu badań, to może prowadzić do wielu ciekawych obserwacji szczegółowych.

Czy stanie się tak w wyniku „douczenia" się matematyki przez filozofów, czy w wyniku zwrócenia uwagi matematyków na kwestie filozoficzne i „doczytaniem" przez nich literatury filozoficznej. Czy będzie to zatem dialog pomiędzy „filozofującym matematykiem" a „matematyzującym filozofem"? Prawdopodobnie nie; niestety będzie to raczej monolog filozofa, starającego się o zrozumienie tego fenomenu, jakim jest matematyka. Nie ma raczej powrotu do okresu dyskusji filozoficznych, prowadzonych w środowisku matematyków na przełomie wieków. Matematycy współcześni tworzą matematykę, ale brak im czasu na uprawianie poważnej refleksji „na metapoziomie". Tym ważniejsze jest zatem uświadomienie sobie, że analiza filozoficzna dotycząca matematyki winna być oparta na możliwie rzetelnej znajomości przedmiotu naszych analiz i oprzeć się musi na specjalizacji także w gronie filozofów matematyki.

Nie znaczy to oczywiście, że tradycyjne pytania filozofii matematyki zostaną zarzucone, jakoby ogólne (czy ogólnikowe). Wręcz przeciwnie, wyspecjalizowane badania prowadzone w różnych kierunkach (z których

[13] O zagadnieniach tych mówił prof. Andrzej Lasota na konferencji w Krakowie w roku 1995. Czytelnika odsyłamy do tomu [Heller, Urbaniec 1996].

[14] Jest to logika z dodatkowym kwantyfikatorem, interpretowanym jako „istnieje nieskończenie wiele". W logikę $L(Q_0)$ jest zatem niejako „wbudowane" pojęcie nieskończoności.

kilka przykładów podaliśmy) pomoże nam na ujrzenie tych tradycyjnych pytań w nowym świetle, na sformułowanie nowych wniosków dotyczących natury matematyki i lepsze zrozumienie roli, jaką matematyka odgrywa w naszym życiu intelektualnym i naszej działalności poznawczej.

Bibliografia

Barwise J., Feferman S., [1985] *Model–theoretic logics*, Springer–Verlag.

Davis P. J., Hersh R., [1994] *Świat matematyki*, Warszawa, PWN.

Heller M., Urbaniec J., [1996] *Otwarta nauka i jej zwolennicy*, Tarnów, Biblos.

Maddy P., [1991] *Philosophy of mathematics: prospects for the 1990s*, „Synthese” 88, s. 155–164.

Moschovakis Y., [1980] *Descriptive Set Theory*, North–Holland.

Murawski R., [1984] *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne” 11–12 (228–229), s. 75–88.

——— [1993] *Rozwój programu Hilberta*, „Wiadomości Matematyczne” XXX, s. 51–72.

Shapiro S., [1991] *Foundations without foundationalism*, Clarendo Press, Oxford.

Wang H., [1974] *From Mathematics to Philosophy*, New York: Humanities Press.

Wigner E. P. [1960] *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, „Communications in Pure and Applied Mathematics” 13, s. 1–14.

Wójtowicz K., [1995] *Wokół problemu realizmu teoriomnogościowego*, „Filozofia Nauki” 4, s. 113–130.

——— [1996] *Paradoksy skończoności*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” XVIII, s. 87–99.