ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXIII / 1998, s. 67–94*

Jan PIKUL

OBECNOŚĆ TRADYCYJNYCH WĄTKÓW FILOZOFICZNYCH WE WSPÓŁCZESNEJ FILOZOFII MATEMATYKI

W miarę historycznego rozwoju matematyki zaznacza się coraz wyraźniejszy wpływ badań matematycznych, zwłaszcza tych najbardziej podstawowych, na filozofię matematyki. M. Heller zauważa: „Od czasów Platona aż prawie do epoki Kanta naturalnym środowiskiem matematyki była filozofia [...]. Wkrótce jednak po okresie Kanta matematyka sama zaczęła kształtować swoje własne środowisko naturalne"[1]. Przejęcie prac w dziedzinie filozofii matematyki przez zawodowych matematyków i rozwój badań nad podstawami matematyki sprawiły, że między współczesną filozofią matematyki a matematyką trudno poprowadzić wyraźną linię demarkacyjną. Zwłaszcza tak zwane „klasyczne" kierunki w XX–wiecznej filozofii matematyki: logicyzm, intuicjonizm i formalizm, które powstały w wyniku badań nad podstawami matematyki, wydają się w niewielkim tylko (i trudno uchwytnym) stopniu wykraczać poza teorię podstaw matematyki[2].

Jednak — mimo ścisłej zależności wspomnianych kierunków w filozofii matematyki od badań matematycznych — można dostrzec w nich wątki zdecydowanie filozoficzne, zaliczane do tradycyjnych zagadnień filozofii. Platonizm, mający we współczesnej filozofii matematyki także wybitnych przedstawicieli, oraz nowe prądy w filozofii matematyki, uwzględniające poznający podmiot i ewolucję teorii matematycznych, są jeszcze bliższe filozofii w jej tradycyjnym rozumieniu. Tak więc rozwój badań w dziedzinie podstaw

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] M. Heller, *Szczęście w przestrzeniach Banacha*, Znak, Kraków 1995, s. 79.

[2] Por. A. Lubomirski, *O uogólnianiu w matematyce*, Ossolineum, Wrocław 1983, s. 40; informację o różnych kierunkach w filozofii matematyki można znaleźć w pracy: R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 1995.

matematyki bynajmniej nie usunął z filozofii matematyki zagadnień sensu stricto filozoficznych.

Do zagadnień, należących w ścisłym sensie do dziedziny filozofii, zalicza się tradycyjnie:

(1) zagadnienia ontologiczne

(2) zagadnienia epistemologiczne

(3) zagadnienia aksjologiczne

Można — za Z. Hajdukiem[3] — uzupełnić listę zagadnień ściśle filozoficznych, dodając:

(4) zagadnienia semantyczne

(5) zagadnienia metodologiczne

Semantyka matematyki bada problemy odniesienia przedmiotowego teorii matematycznych i zagadnienie prawdy w matematyce.

Metodologia matematyki bada metody dopuszczalne w matematyce, zwłaszcza w dowodzeniu twierdzeń, oraz zagadnienie aplikacji teorii matematycznych[4].

Wydaje się jednak, że zarówno semantyka, jak i metodologia matematyki powinny być raczej zaszeregowane do teorii podstaw matematyki lub metamatematyki. Semantyka (taka, jaką uprawiają matematycy) jest raczej działem logiki niż filozofii. W tradycyjnie rozumianej filozofii zbliżone zagadnienia (na przykład zagadnienie prawdy) rozpatruje się w epistemologii. Termin „metodologia nauk dedukcyjnych" uważa się często wręcz za synonim słów „metamatematyka", „metalogika" lub „teoria dowodu"[5]. W niniejszym artykule omówię kolejno trzy podstawowe grupy zagadnień filozoficznych występujące w filozofii matematyki: zagadnienia ontologiczne, epistemologiczne (łącznie z problemami „semantycznymi") oraz aksjologiczne, starając się ukazać związki między tradycyjnymi wątkami filozoficznymi a współczesnymi osiągnięciami w dziedzinie podstaw matematyki.

1. Zagadnienia ontologiczne

Do zagadnień ontologicznych w filozofii matematyki można zaliczyć: (1) zagadnienie przedmiotu badań matematycznych, czyli pytanie o naturę obiektów matematyki; (2) zagadnienie istnienia obiektów matematycznych.

[3]Por. Z. Hajduk, *Ontologiczne założenia matematyki*, [w:] *Matematyczność przyrody*, red. M. Heller, J. Życiński, A. Michalik, OBI, Kraków 1992, s. 115.

[4]Por. tamże, s. 131.

[5]Por. *Mała encyklopedia logiki*, red. W. Marciszewski, Ossolineum, Wrocław 1970, hasło: „Metodologia nauk dedukcyjnych", s. 168–169.

Odpowiedź na pytanie o naturę i istnienie obiektów matematyki jest ściśle związana z przyjętą koncepcją podstaw matematyki. Dziś, gdy wśród matematyków przeważa stanowisko uznające teorię mnogości za fundamentalną teorię matematyki, pytanie o naturę i istnienie obiektów matematyki redukuje się często do pytania o naturę i istnienie obiektów teorii mnogości — zbiorów[6]. Słowo „zbiór" ma w języku potocznym dwa istotnie różne znaczenia. W znaczeniu kolektywnym „zbiór" jest pewną całością złożoną ze swych elementów, traktowanych jako części tej całości. W tym sensie zbiór konkretnych, zmysłowo postrzegalnych przedmiotów jest pewnym innym, również dostrzegalnym zmysłowo obiektem. W znaczeniu kolektywnym stos kamieni jest zarówno zbiorem tych kamieni, jak i zbiorem wszystkich molekuł, z których kamienie stosu się składają — obydwa te zbiory należy utożsamić, gdyż ich elementy składają się na tę samą całość[7]. Słowo „zbiór" można rozumieć także w znaczeniu dystrybutywnym. W tym znaczeniu, bardziej abstrakcyjnym, zbiór jest zespołem wielu posiadających wspólną cechę przedmiotów połączonych w jedność[8]. Zbiór kamieni i zbiór ich molekuł to dwa zupełnie różne zbiory w znaczeniu dystrybutywnym. Teoria mnogości jest ogólną teorią zbiorów w znaczeniu dystrybutywnym, przy czym pojęcie zbioru precyzuje się dodatkowo, różnie w różnych wersjach teorii mnogości[9].

Trzeba zaznaczyć, że istnieją też próby oparcia matematyki nie na teorii mnogości, lecz na teorii kategorii. Teoria ta została stworzona w latach czterdziestych przez S. MacLane'a i S. Eilenberga. Matematyka w takim ujęciu byłaby nauką o kategoriach matematycznych i o funktorach. Jednak podejście to ma mniej zwolenników niż stanowisko upatrujące fundamentalnej teorii matematycznej w teorii mnogości.

Ontologia matematyki bada zagadnienia związane ze statusem ontologicznym obiektów matematycznych. Można tu wyróżnić trzy zasadnicze stanowiska, które są współczesnymi odpowiednikami różnych stanowisk w średniowiecznym sporze o uniwersalia[10]:

(1) Platonizm albo realizm (Z. Hajduk uważa platoński realizm za odmianę obiektywnego idealizmu[11]) utrzymuje, że obiekty matematyczne istnieją niezależnie od przestrzeni, czasu i poznającego je podmiotu. Są „odkry-

[6]Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 161.
[7]Por. tamże, s. 164–165.
[8]Por. *Mała encyklopedia logiki*, hasło: „Zbiór", s. 361.
[9]Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 190–191.
[10]Por. tamże, s. 165–169.
[11]Por. Z. Hajduk, *Ontologiczne założenia matematyki*, s. 131.

wane”, a nie „tworzone” przez matematyków[12]. Wszystkim tym obiektom matematycznym, które są niesprzeczne, należy przypisać realne istnienie. Dokładniej: dla każdej poprawnie sformułowanej i niesprzecznej własności istnieje zbiór tych przedmiotów, które tę własność spełniają, a jego istnienie nie sprowadza się do istnienia jego elementów[13]. Wśród matematyków jest wielu realistów, a w sposób szczególny ontologiczny realizm jest obecny w nurcie logicystycznym współczesnej filozofii matematyki[14].

(2) (Neo)nominalizm jako stanowisko przeciwstawne w stosunku do realizmu uznaje jedynie istnienie fizyczne, nie uznając istnienia pojęciowego. Traktuje więc obiekty matematyczne jedynie jako symbole–napisy, a matematykę jako zbiór reguł operowania tymi symbolami[15]. W kwestii istnienia zbiorów nominalizm stoi na stanowisku, że istnieją tylko przedmioty jednostkowe, a wypowiedzi o zbiorach należy zinterpretować jako wypowiedzi o indywiduach[16]. Gdy chodzi o indywidua, nominalizm formalny dopuszcza istnienie obiektów jednostkowych jakiejkolwiek natury, a tak zwany nominalizm merytoryczny uznaje istnienie jedynie obiektów indywidualnych pewnego określonego rodzaju, np. rzeczy fizycznych (reizm T. Kotarbińskiego)[17]. Nominalizm jest ontologią typową dla formalizmu, zwłaszcza skrajnego, choć twórca formalizmu — Hilbert — nie był właściwie nominalistą.

(3) Konstruktywizm albo (neo)konceptualizm[18] (według Z. Hajduka jest on odmianą subiektywnego idealizmu[19]), w szczególności intuicjonizm, uznaje istnienie tylko tych obiektów matematycznych (zbiorów), które są konstruowalne, a więc które można skonstruować ze zbiorów, których istnienie jest intuicyjnie oczywiste[20]. Konstruktywizm nie jest zresztą stanowiskiem zupełnie jednolitym i ściśle określonym z punktu widzenia ontologii. Murawski wyróżnia trzy wersje konstruktywizmu: (1) obiektywistyczną, traktującą konstrukcje jako twory istniejące niezależnie od podmiotu (by-

[12]Por. tamże, s. 132, a także A. Lubomirski, *O uogólnianiu w matematyce*, s. 44.

[13]Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 167.

[14]Por. M. Heller, *Nauka i wyobraźnia*, Znak, Kraków 1995, s. 160.

[15]Por. Z. Hajduk, *Ontologiczne założenia matematyki*, s.132.

[16]Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 168.

[17]Por. tamże, s. 168–169.

[18]A. Lubomirski używa terminu „konstruktywizm” — por. A. Lubomirski, *O uogólnianiu w matematyce*, s. 44; R. Murawski — w odniesieniu do problemów ontologicznych — mówi raczej o „neokonceptualizmie” — por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 168.

[19]Por. Z. Hajduk, *Ontologiczne założenia matematyki*, s. 131.

[20]Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 168.

łoby to więc stanowisko bliskie realizmowi); (2) mentalistyczną, według której konstrukcje istnieją jedynie jako wytwory aktów myślowych matematyków (ta wersja konstruktywizmu może być utożsamiona z konceptualizmem) oraz (3) finitystyczną, która operuje tylko przekształcaniem napisów (stanowisko bliskie nominalizmowi)[21].

Obok wymienionych trzech klasycznych stanowisk w kwestii sposobu istnienia przedmiotów matematyki jest możliwe czwarte stanowisko: potraktowanie tradycyjnie rozumianych kwestii ontologicznych jako pseudoproblemu filozoficznego, zupełnie nieistotnego dla praktyki badawczej w matematyce[22]. Takie jest na przykład stanowisko R. Carnapa i W. V. Quine'a, określone przez Z. Hajduka jako fikcjonalizm, odrębny od tradycyjnego fikcjonalizmu F. Nietzschego i H. Vaihingera[23]. Fikcjonalizm (podobnie jak nominalizm) pozostaje w opozycji do „tradycyjnego modelu esencjalnego" w ontologii matematyki[24]. Na płaszczyźnie ontologicznej obiekty matematyczne istnieją według Quine'a podobnie jak wytwory sztuki: są tworami fikcyjnymi[25]. Stanowisko to nie jest jednak całkowitą rezygnacją z wszelkiej ontologii: istnienie formalne (typowe dla obiektów matematycznych) jest odmienne od istnienia realnego i podlega odmiennej ontologii, której językiem (w odróżnieniu od języka potocznego, wzbogaconego jedynie terminologią filozoficzną, stosowanego w ontologii tradycyjnej) jest rachunek predykatów[26]. Tak pojęta ontologia matematyki jest bliższa teorii podstaw matematyki niż tradycyjnie rozumianej filozofii. Quine nie respektuje zresztą różnicy między ontologią a nauką, głosząc tezę o zasadniczej jedności wiedzy[27]. M. Heller pisze: „Quine sądzi, że jego koncepcja językowych 'konsekwencji ontologicznych', tzn. przekład sporów ontologicznych na problem semantyczny, 'dotyczący słów i sposobu ich używania', jest w stanie uwolnić filozofię matematyki od 'jałowych konfliktów' między 'odmiennymi punktami widzenia'"[28].

Do problemów ontologicznych w filozofii matematyki trzeba zaliczyć także zagadnienie istnienia zbiorów nieskończonych. Do czasu powstania

[21] Por. tamże, s. 168; por. tamże, s. 123, gdzie ostatnie stanowisko jest nazwane wprost „nominalizmem".

[22] Por. tamże, s. 169.

[23] Por. Z. Hajduk, *Ontologiczne założenia matematyki*, s. 115.

[24] Por. tamże, s. 115.

[25] Por. tamże, s. 128.

[26] Por. tamże, s. 118–119.

[27] Por. tamże, s. 118.

[28] M. Heller, *Nauka i wyobraźnia*, s. 161.

teorii mnogości większość matematyków z dużą rezerwą odnosiła się do nieskończoności aktualnej, uznając jedynie nieskończoność potencjalną. Już u matematyków starożytnej Grecji można zauważyć obawę przed nieskończonością aktualną. Przejawem tej obawy były na przykład trudności w zaakceptowaniu liczb niewymiernych. Powodem niechęci matematyków do nieskończoności aktualnej był między innymi brak ścisłego pojęcia granicy i związane z tym paradoksy Zenona z Elei. Już w starożytności znano prawdopodobnie także inny paradoks dotyczący zbiorów aktualnie nieskończonych, a polegający na tym, że zbiór nieskończony może być równoliczny ze swoją częścią właściwą. Paradoks ten znał prawdopodobnie już Plutarch (ok. 46–120), wyraźnie sformułował go neoplatończyk Proklos Diadochus (410–485), a później Galileusz (1564–1642). Dopiero w XIX w. R. Dedekind i G. Cantor uznali ten „paradoks” za istotną własność odróżniającą zbiory nieskończone od skończonych i wykorzystali tę własność do zdefiniowania zbiorów nieskończonych[29].

Rozwój badań w dziedzinie podstaw matematyki, a w szczególności rozwój teorii mnogości, przełamał w dużym stopniu niechęć matematyków do mówienia o nieskończoności aktualnej. Z jednej strony teoria mnogości Cantora stała się pierwszą teorią zbiorów nieskończonych, z drugiej jednak strony odsłoniła całą, nieznaną wcześniej matematykom, złożoność problemu nieskończoności aktualnej. Po pierwsze nowe antynomie, które pojawiły się w teorii mnogości, zmusiły matematyków do takiej modyfikacji teorii, by ograniczyć możliwość tworzenia „dowolnie dużych” zbiorów (jedną z takich modyfikacji jest aksjomatyczna teoria mnogości Zermela–Fraenkla[30]). Po drugie okazało się, że istnieje nieskończenie wiele „rodzajów” nieskończoności: moce zbiorów nieskończonych (czyli liczby kardynalne pozaskończone) tworzą ciąg hierarchiczny. Cantor dowiódł, że zbiór potęgowy zbioru liczb naturalnych (czyli zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych) jest liczniejszy niż zbiór liczb naturalnych, a równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Przypuszczenie, że nie istnieje żaden nieskończony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, którego moc byłaby większa niż moc zbioru liczb naturalnych i równocześnie mniejsza niż moc zbioru liczb rzeczywistych nazwano „hipotezą *continuum*”[31]. Hipoteza ta, po wielu próbach jej udowodnienia lub obalenia, okazała się niezależna od

[29] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 162–164.

[30] Por. tamże, s. 171–172.

[31] Jest to jedno ze sformułowań hipotezy *continuum*, pochodzące od Cantora, historycznie wcześniejsze (1878). W roku 1883 Cantor podał inne sformułowanie, które jest równoważne poprzedniemu przy założeniu pewnika wyboru. Nazwa „hipoteza *continuum*”

aksjomatów teorii mnogości Zermela–Fraenkla[32]. Problemy z hipotezą *continuum* oraz z budzącym także wiele kontrowersji pewnikiem wyboru (pewnik ten jest również niezależny od pozostałych aksjomatów teorii względności Zermela–Fraenkla, a jako niekonstruktywny i mający pewne paradoksalne konsekwencje bywa często kwestionowany[33]) spowodowały intensywne poszukiwania innych, alternatywnych wobec aksjomatycznej teorii mnogości Zermela–Fraenkla, rozwiązań w dziedzinie podstaw matematyki. Próbowano na przykład dołączać do aksjomatów teorii mnogości kolejne pewniki, postulujące istnienie dużych liczb kardynalnych (zwane aksjomatami nieskończoności[34]). W takich systemach hierarchia liczb kardynalnych pozaskończonych jest jeszcze bardziej skomplikowana niż w systemie Cantora. Wszystkie te próby „poradzenia sobie" z nieskończonością aktualną sugerują jednak pytanie, czy nieskończoność jest w ogóle potrzebna w matematyce skończonej[35]. Już intuicjonizm, będący reakcją na teorię mnogości Cantora i metody dowodu w niej stosowane, odrzucał istnienie nieskończoności aktualnej, prowadził jednak do znacznego zubożenia matematyki. Program formalizmu zakładał usprawiedliwienie matematyki infinitystycznej przy pomocy metod finitystycznych, jednak program ten załamał się wraz z odkryciem twierdzeń limitacyjnych. Według Murawskiego pewne wyniki Gödla i jego kontynuatorów badających niezupełność arytmetyki liczb naturalnych prowadzą do wniosku, że „co najmniej pierwszy stopień nieskończoności w teorii mnogości Cantora jes t konieczny dla matematyki (dokładniej: kombinatoryki) skończonej"[36]. Ten sam autor wyraża jednak przekonanie, że w „matematyce stosowanej" (przy zastrzeżeniu całej nieprecyzyjności tego określenia) można się raczej obejść bez nieskończoności[37].

W związku z badaniami nad hipotezą *continuum* K. Wójtowicz zauważa: „Okazało się zatem, że odpowiedzi na pytanie o 'prawdziwą' wartość *continuum* nie możemy poszukiwać w sformalizowanej teorii mnogości. Hipoteza *continuum* staje się zatem problemem z pogranicza matematyki i filozofii"[38].

---

jest późniejsza i pochodzi od Bernsteina (1905). Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 181–182.

[32] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 183.

[33] Por. tamże, s. 177–181.

[34] Por. tamże, s. 187.

[35] Por. tamże, s. 189.

[36] Tamże, s. 189.

[37] Por. tamże, s. 190.

[38] K. Wójtowicz, *O losowaniu liczby z odcinka*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 20: 1997, s. 83.

Jest to przykład wzajemnego powiązania teorii podstaw matematyki i filozofii; trudno tu wskazać wyraźną granicę między tymi dwoma dziedzinami wiedzy.

Problem istnienia nieskończoności aktualnej ukazuje z całą ostrością, jak bardzo odpowiedź na tradycyjne pytania ontologiczne jest we współczesnej filozofii matematyki sprzężona z wynikami badań nad podstawami matematyki.

2. Zagadnienia epistemologiczne

Epistemologia matematyki zajmuje się problemem natury i źródeł poznania matematycznego, a więc pytaniem o charakter sądów matematycznych i o źródła poznania apriorycznego, a także zagadnieniem granic poznania w matematyce[39].

Od czasów Kanta w epistemologii wyróżnia się sądy (lub zdania; sąd w sensie logicznym jest to znaczenie zdania oznajmującego[40]) analityczne i syntetyczne. Sądy syntetyczne z kolei mogą być *a priori* lub *a posteriori*. Sądy analityczne są to sądy, których prawdziwość lub fałszywość może być orzeczona na podstawie samego znaczenia zawartych w nich wyrażeń; sądy syntetyczne to sądy, których uznanie lub odrzucenie wymaga wykroczenia poza sferę znaczeń. Uznanie lub odrzucenie sądów *a priori* jest możliwe bez odwoływania się do doświadczenia, w przeciwieństwie do sądów *a posteriori*, opierających się na doświadczeniu[41].

Odwieczny spór aprioryzmu z empiryzmem na terenie epistemologii jest w swej istocie sporem o rolę rozumu i doświadczenia w wartościowym poznaniu. J. Woleński tak określa główne stanowiska w tym sporze: „Aprioryzm skrajny (np. Platona) twierdzi, że rozum jest jedynym źródłem wiedzy wartościowej, aprioryzm umiarkowany (np. Kanta), że rozum jest źródłem głównym, empiryzm skrajny (np. J. S. Milla), że wiedza wartościowa jest uzyskiwana wyłącznie na podstawie doświadczenia, a wreszcie empiryzm umiarkowany (np. Hume'a), że jest ona uzyskiwana przede wszystkim na podstawie doświadczenia"[42]. Woleński (za Ajdukiewiczem) charaktery-

---

[39] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 15; autor zalicza w tym miejscu do problemów epistemologicznych także problemy metodologiczne, których nie omawia osobno. Por. także Z. Hajduk, *Ontologiczne założenia matematyki*, s. 131.

[40] Por. *Mała encyklopedia logiki*, hasło: „Sąd", s. 261.

[41] Por. J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, PWN, Warszawa 1993, s. 116; por. także W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii*, PWN, Warszawa 1970, t. 2, s. 165.

[42] J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 116.

zuje poszczególne kierunki w sporze aprioryzm — empiryzm przez przyporządkowanie im typów zdań, które poszczególne kierunki uważają za wartościowe poznawczo. Aprioryzm skrajny uznaje zdania analityczne i syntetyczne *a priori*. Aprioryzm umiarkowany przyjmuje za wyrażające wartościowe poznanie zdania analityczne, syntetyczne *a priori* i syntetyczne *a posteriori*. Empiryzm skrajny akceptuje jako wartościowe poznawczo jedynie zdania syntetyczne *a posteriori*, a empiryzm umiarkowany zdania analityczne i zdania syntetyczne *a posteriori*[43].

Jaki charakter mają sądy (zdania) matematyczne? Kant uznał sądy logiki za sądy analityczne. Są one aprioryczne, konieczne i tautologiczne (orzecznik jest zawarty w podmiocie), a ich prawdziwość wynika z zasady sprzeczności (to powiązanie prawdziwości z zasadą sprzeczności stanowi według Kanta kryterium analityczności)[44]. Jednak sądy analityczne nie powiększają naszej wiedzy, podczas gdy — zdaniem Kanta — zarówno czysta matematyka, jak i matematyczne przyrodoznawstwo bez wątpienia wiedzę powiększają. Dlatego Kant zaliczył wszystkie sądy czystej matematyki (w szczególności arytmetyki i geometrii) do sądów syntetycznych *a priori* (Kant rozróżniał sądy syntetyczne *a priori* intuicyjne i dyskursywne; sądy matematyczne są intuicyjnymi sądami *a priori*, w odróżnieniu od dyskursywnych sądów filozofii)[45]. Najistotniejszym problemem filozofii Kanta była odpowiedź na pytanie, w jaki sposób możliwe są sądy syntetyczne *a priori*. Kant wskazał tu na rolę apriorycznych warunków poznania, którymi są przestrzeń i czas, jako czyste formy naoczności (według Kanta przestrzeń i czas nie istnieją poza nami, lecz są stałymi formami naszej zmysłowości) oraz aprioryczne formy rozumu — kategorie intelektu[46]. W *Prolegomenach do wszelkiej przyszłej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka* Kant pisał: „Otóż przestrzeń i czas są tymi danymi naocznymi (*Anschauungen*), które czysta matematyka kładzie u podstaw wszystkich swych poznań i sądów, występujących zarazem jako apodyktyczne i konieczne. Matematyka bowiem musi wszystkie swe pojęcia przedstawić najpierw w naoczności, czysta zaś matematyka — w czystej naoczności, tj. musi je konstruować. Bez takiej naoczności nie może ona ani kroku uczynić (nie może bowiem postępować analitycznie, to znaczy przez rozbiór pojęć, lecz tylko syntetycznie), dopóki mianowicie brak jej czystej naoczności, w której jedynie może być dany

[43]Por. tamże, s. 116–117.
[44]Por. tamże, s. 124–127.
[45]Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 52.
[46]Por. tamże, s. 53.

materiał do sądów syntetycznych *a priori*. Geometria kładzie u swych podstaw czystą naoczność przestrzeni. Arytmetyka nawet swoje pojęcia liczb wytwarza przez kolejne dołączanie jednostek w czasie; zwłaszcza jednak czysta mechanika może wytworzyć swoje pojęcia ruchu tylko za pomocą wyobrażenia czasu”[47]. Kant odróżniał też matematykę czystą od matematyki stosowanej. Twierdzenia matematyki czystej są zawsze zdaniami syntetycznymi *a priori*, natomiast zdania matematyki stosowanej są albo zdaniami syntetycznymi *a priori* (gdy dotyczą przestrzeni i czasu), albo zdaniami syntetycznymi *a posteriori* (gdy mają treść empiryczną)[48].

W XX–wiecznej filozofii matematyki najbliższe stanowisku Kanta są poglądy konstruktywistów, którzy — podobnie jak Kant — uważają zdania matematyki za zdania syntetyczne *a priori*. W szczególności twórca intuicjonizmu Brouwer, nie mogąc podtrzymywać tezy Kanta o aprioryczności przestrzeni (wobec odkrycia geometrii nieeuklidesowych), wywodził wszystkie pojęcia matematyki, także geometrii (w szczególności pojęcie continuum), z aprioryczności czasu[49].

Twórca logicyzmu G. Frege, w odróżnieniu od Kanta, uważał twierdzenia arytmetyki za analityczne i aprioryczne. Było to naturalną konsekwencją jego przekonania, że arytmetykę można wyprowadzić z logiki. Frege przeciwstawiał arytmetykę geometrii, której aksjomaty mogą być wybrane z pewną dowolnością, a więc ich zaprzeczenie nie musi prowadzić do logicznej sprzeczności. Z tego powodu uważał twierdzenia geometrii za syntetyczne i aprioryczne[50]. Russell nie uznawał zdań syntetycznych *a priori*. Matematyka czysta jest według niego zawsze analityczna. Geometria czysta zajmuje się tylko wyprowadzaniem twierdzeń z aksjomatów, nie badając ich prawdziwości, nie zawiera więc niczego, co nie wynikałoby z logiki. Natomiast geometria stosowana (jako dział fizyki) jest nauką empiryczną — jest syntetyczna, ale *a posteriori*[51].

Hilbert, formułując program formalizmu, pragnął znaleźć w matematyce finitystycznej usprawiedliwienie dla matematyki infinitystycznej. Jego zdaniem pojęcie nieskończoności jest w matematyce niezbędne, ale zdania mówiące o nieskończoności same w sobie nie mają żadnej wartości logicz-

[47] I. Kant, *Prolegomena do wszelkiej przyszłej metafizyki, która będzie mogła wystąpić jako nauka*, [fragment w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór i oprac. R. Murawski, UAM, Poznań 1986, s. 111–112.

[48] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 54–55.

[49] Por. tamże, s. 105–106.

[50] Por. J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 130–131.

[51] Por. tamże, s. 133–134.

nej. Nieskończoność jest ideą czystego rozumu w sensie Kanta, pojęciem wewnętrznie niesprzecznym, ale niemożliwym do zrealizowania w rzeczywistości[52]. Formalizm poprzez żądanie aksjomatyzacji całej matematyki przyczynił się do upowszechnienia przekonania o hipotetycznym charakterze twierdzeń matematycznych: aksjomaty i reguły wynikania przyjmuje się dowolnie (tak jednak, by nie prowadziły do sprzeczności), a twierdzenia wyprowadza się w sposób czysto „mechaniczny” z aksjomatów. Można mówić o ich prawdziwości tylko przy założeniu, że aksjomaty i reguły wnioskowania są prawdziwe (cokolwiek by to miało znaczyć)[53].

R. Carnap był myślicielem, który stanowczo odrzucił możliwość zdań syntetycznych *a priori*. Na jego stanowisko duży wpływ wywarły poglądy logicystów. Od Fregego przejął myśl, że podstawą analityczności jest logika, od Russella przekonanie, że cała matematyka jest analityczna[54]. Carnap pozostawał też pod silnym wpływem *Traktatu logiczno–filozoficznego* Wittgensteina (1922), który wśród sensownych zdań logiki wyróżnił dwa przypadki skrajne: zdania zawsze prawdziwe (to znaczy prawdziwe przy każdym wartościowaniu prawdziwościowym ich zdań elementarnych) to tautologie, zdania zawsze fałszywe są sprzeczne. Jedne i drugie nie mówią nic o rzeczywistości. Tezy logiki są tautologiami, a więc nic nie wnoszą do naszej wiedzy. Carnap usiłował tę myśl Wittgensteina rozciągnąć na całą matematykę: chciał tak zdefiniować zdania analityczne, by definicja ta obejmowała wszystkie zdania matematyki i by okazały się one tautologiami w sensie Wittgensteina, a więc zdaniami bez informacji o faktach. Carnap zdawał sobie sprawę z trudności w realizacji takiego programu, wynikających z twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki. Usiłował ominąć te trudności, wprowadzając dwa poziomy języka i pojęcie L–prawdy, jednak problem nie został do końca rozwiązany i okazał się jedną z zasadniczych trudności pozytywizmu logicznego, uznającego tylko dwa rodzaje zdań sensownych: zdania analityczne, będące tautologiami i nic nie wnoszące do naszej wiedzy oraz zdania syntetyczne *a posteriori*, rozumiane jako sprawozdanie z „nagich faktów doświadczalnych”[55].

W kwestiach statusu epistemologicznego zdań matematyki trzeba odnotować także stanowisko empirystów skrajnych, uznających zdania matematyczne za syntetyczne *a posteriori*, a więc za zdania doświadczalne.

[52] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 126–127.
[53] Por. M. Heller, *Szczęście w przestrzeniach Banacha*, s. 80.
[54] Por. J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 135.
[55] Por. tamże s. 135–141.

Takie stanowisko zajmował J. S. Mill, jeden z głównych przedstawicieli XIX–wiecznego empiryzmu. Mill obok indukcji, którą uważał za podstawę wszelkiej wiedzy wartościowej poznawczo, uznawał także dedukcję, dopuszczalną w matematyce; uważał jednak, że źródłem matematyki jest rzeczywistość zmysłowa. Pojęcia matematyki są wyabstrahowane z otaczającej nas rzeczywistości. Dedukcja pozwala poprawnie wyprowadzić twierdzenia matematyki z założeń, ale założenia te pochodzą ostatecznie z indukcji. Dlatego twierdzenia matematyki nie są prawdami pewnymi i koniecznymi[56]. W XX wieku kontynuacją stanowiska Milla są poglądy tych filozofów, którzy traktują matematyką jako wiedzę w większym lub mniejszym stopniu empiryczną, np. koncepcje I. Lakatosa[57].

Wraz z rozwojem metamatematyki i teorii podstaw matematyki zaznacza się coraz większy wpływ tych dyscyplin na epistemologię matematyki. Woleński zauważa, że problem aprioryczności jest problemem bardziej „filozoficznym” niż problem analityczności, gdyż ten drugi łatwiej poddaje się analizom metamatematycznym[58]. Dlatego też wpływ badań w dziedzinie podstaw matematyki na pojęcie analityczności jest bardziej bezpośredni. Na przykład Gödel (inaczej niż Carnap) uważał, że nierozstrzygalność arytmetyki przeczy jej analityczności. I. Copi, posługując się metamatematyką, próbował uzasadnić, że zdanie stwierdzające niesprzeczność arytmetyki jest zdaniem syntetycznym *a priori*[59]. Podobny wniosek z tak zwanej tezy Churcha (mówiącej, że klasa funkcji obliczalnych w sensie intuicyjnym jest identyczna z klasą funkcji rekurencyjnych[60]) oraz z twierdzenia Churcha o nierozstrzygalności rachunku predykatów wyciąga Ch. Castonguay, który uważa, że poznanie matematyczne jest syntetyczne *a priori*[61]. J. Woleński, przeciwnie, z rozważań metamatematycznych wnioskuje, że matematyka jest analityczna. Autor ten wyróżnia absolutną i relatywną analityczność. Absolutne zdania analityczne to takie zdania, które są analityczne z uwagi na dowolną teorię T; relatywne zdania analityczne to zdania analityczne z uwagi na określoną teorię T. Absolutne zdania analityczne są według Woleńskiego

[56] Por. *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wstęp R. Murawskiego do tekstu J. S. Milla na s. 131.

[57] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 147–149.

[58] Por. J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 118.

[59] Por. tamże, s. 153–154.

[60] Por. tamże, s. 61.

[61] Por. tamże, s. 157.

szczególnym przypadkiem relatywnych zdań analitycznych[62]. W sensie absolutnym analityczna jest logika, dlatego jej twierdzenia są tautologiami. Natomiast pojęcia zbioru i należenia do zbioru są analityczne w sensie relatywnym, a to pociąga za sobą analityczność w sensie relatywnym aksjomatów teorii mnogości i całej matematyki. Relatywne zdania analityczne nie są tautologiami, a więc stanowisko to uzasadnia, dlaczego matematyka nie jest kolekcją tautologii[63]. Jeszcze inne stanowisko reprezentuje DeLong, który uważa, że w świetle osiągnięć metamatematyki dystynkcja „analityczny — syntetyczny" stała się przestarzała i nie ma sensu pytać, czy na przykład zdanie nierozstrzygalne w sensie Gödla jest analityczne, czy syntetyczne[64].

Postępy metamatematyki mogą pośrednio mieć wpływ także na pytanie o aprioryczność matematyki. Woleński uważa, że rozróżnienie analityczności w sensie absolutnym i w sensie relatywnym może sugerować podobny podział zdań *a priori* na absolutnie aprioryczne (niezależne od jakiegokolwiek doświadczenia) i relatywnie aprioryczne (niezależne od pewnego doświadczenia). Absolutna analityczność nie musiałaby iść w parze z absolutną apriorycznością. Umiarkowany empiryzm nie musi rezygnować z uznania wiedzy absolutnie analitycznej za wartościową, gdyż zdania absolutnie analityczne mogłyby być oparte na relatywnym poznaniu *a priori*[65].

Czy poznanie matematyczne jest źródłem wiedzy o jakiejś rzeczywistości, a więc czy w matematyce możliwe jest poznanie obiektywne? Jeśli tak, to w jaki sposób możemy wiedzieć coś o obiektach matematycznych? Problemy te są ściśle związane ze stanowiskiem ontologicznym w kwestii sposobu istnienia przedmiotów matematyki. Dla konstruktywistów obiekty matematyczne są tylko naszymi konstrukcjami, więc — jak zauważa Lubomirski — problemem staje się raczej pytanie, w jaki sposób możliwa jest w matematyce jakakolwiek niewiedza[66]. Konsekwentny formalizm nie interesuje się tym zagadnieniem. Pytanie o źródła naszej wiedzy o obiektach matematycznych staje się istotnym problemem dla platoników, uznających realne i niezależne od podmiotu istnienie przedmiotów matematycznych. Poznanie matematyczne jest dla przedstawicieli platonizmu „odkrywaniem" realnie istniejącej matematycznej rzeczywistości, a więc jest poznaniem obiektyw-

[62]Por. tamże, s. 161–167; J. Woleński definiuje absolutną i relatywną analityczność w sensie semantycznym, syntaktycznym i pragmatycznym, posługując się aparatem metamatematyki.

[63]Por. tamże, s. 164–165.

[64]Por. tamże, s. 157.

[65]Por. tamże, s. 169.

[66]Por. A. Lubomirski, *O uogólnianiu w matematyce*, s. 46.

nym. Platon uważał, że wiedza o ideach jest pewna, konieczna i jest wiedzą wrodzoną, a źródłem tej wiedzy jest „przypomnienie" (ἀνάμνεσις) tego, co umysł ludzki oglądał w poprzednim życiu[67]. K. Gödel dostrzegał źródło wiedzy matematycznej w specjalnej zdolności ludzkiego umysłu — intuicji matematycznej, a współczesny platonik R. Penrose nazywa zdolność umysłu, która pozwala nam odkrywać obiekty ze świata matematyki, „wglądem matematycznym"[68].

Problem źródeł poznania matematycznego łączy się z problemem granic tego poznania. Czy wyniki badań metamatematycznych, a w szczególności twierdzenia limitacyjne, oznaczają ograniczenie możliwości naszego poznania w dziedzinie matematyki? J. Woleński pisze na ten temat: „Niektórzy autorzy (np. Myhill [1952], Post [1941]) uważają, że twierdzenia limitacyjne mogą być potraktowane jako tezy o umyśle ludzkim i jego ograniczeniach. Nie podzielam tego poglądu, gdyż twierdzenia limitacyjne literalnie dotyczą systemów formalnych i niczego więcej. Aby je zastosować do analizy poznania (w sensie epistemologicznym), trzeba dokonać pewnej pracy interpretacyjnej i preparacyjnej"[69]. R. Penrose uważa, że twierdzenia limitacyjne jasno ukazują, iż „pojęcia matematycznej prawdy nie można zadowalająco ująć w żadnym systemie formalnym"[70]. Jednak umysł ludzki ma dostęp do prawdy matematycznej dzięki zdolności „wglądu matematycznego". Umysł nie podlega ograniczeniom wynikającym z twierdzeń limitacyjnych, ponieważ jego działanie — w odróżnieniu od działania współczesnych komputerów — nie jest algorytmiczne[71]. Natomiast z całą pewnością twierdzenia limitacyjne ujawniają ograniczenia metody aksjomatycznej w przypadku bogatszych systemów i niemożliwość pełnej realizacji programu formalizmu.

Związek między teorią podstaw matematyki a filozofią matematyki jest szczególnie wyraźny w przypadku problemu prawdy matematycznej. Pojęcie prawdy rozważane jest zarówno w epistemologii, jak i w semantyce, traktowanej jako dział logiki[72]. Klasyczną teorią prawdy na terenie epistemologii jest tak zwana korespondencyjna teoria prawdy. Początki tej teorii można

---

[67]Por. W. Tatarkiewicz, *Historia filozofii*, t. 1, s. 83.

[68]Por. A Schinzel, *Prawda i istnienie w matematyce*, [w:] *Nauka — religia — dzieje. VII Seminarium Interdyscyplinarne w Castel Gandolfo 3–5 sierpnia 1993*, red. J. Janik, UJ, Kraków 1994, s. 73 oraz R. Penrose, *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, PWN, Warszawa 1995, s. 130–134.

[69]J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 115.

[70]R. Penrose, *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, s. 133–134.

[71]Por. tamże, s. 456–458.

[72]Por. *Mała encyklopedia logiki*, hasło: „Prawda", s. 215.

znaleźć już w pismach Platona i — zwłaszcza — Arystotelesa. Najbardziej znanym sformułowaniem klasycznej korespondencyjnej definicji prawdy jest — oparta na koncepcji Arystotelesa — definicja św. Tomasza z Akwinu: *Veritas est adaequatio intellectus et rei, secundum quod intellectus dicit esse quod est vel non esse quod non est*[73].

Wraz z rozwojem logiki formalnej pojawił się problem zdefiniowania prawdy w logice. B. Russel sformułował nawet warunki, jakie powinna spełniać dobra teoria prawdy[74]. Jednak przez dość długi czas logicy unikali raczej zagadnień semantycznych, skupiając się na sprawach syntaktycznych, dołączając co najwyżej uwagi semantyczne zredagowane w sposób nieformalny. Powodem unikania problemów semantycznych była świadomość, że przeniesienie klasycznej definicji prawdy na teren logiki formalnej prowadzi natychmiast do antynomii (na przykład tak zwana antynomia kłamcy)[75]. Poprawną semantyczną definicję prawdy podał A. Tarski (po raz pierwszy w roku 1933[76]), unikając antynomii poprzez wyraźne oddzielenie języka od metajęzyka[77]. Definicja Tarskiego bywa uważana za semantyczny odpowiednik klasycznej korespondencyjnej teorii prawdy. Tarski zdawał sobie sprawę z tego, że jego definicja prawdy jest rozwiązaniem problemu należącego do zakresu teorii poznania. Dlatego w swojej pracy z roku 1933 wyraził przekonanie, że semantyczna definicja prawdy zainteresuje przede wszystkim epistemologów[78]. Definicja Tarskiego jest jednak w swej istocie definicją semantyczną, bardziej „logiczną" niż „filozoficzną". Zachodzi więc pytanie, czy i jakie są jej konsekwencje dla tradycyjnie pojmowanej filozofii. K. Popper, który entuzjastycznie przyjął definicję prawdy Tarskiego, wyznaje, że dzięki niej wyzbył się uprzedzeń wobec pojęcia prawdy: „Muszę podkreślić, że przed tym, jak dowiedziałem się od Tarskiego o jego teorii prawdy, moje sumienie intelektualne było dalekie od jasności w sprawie założenia, że na-

[73]Cyt. za: J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 182; por. Sancti Thomae Aquinatis *Quaestiones disputatae. De ente et essentia*, t. 3, Consociatio S. Pauli, Barri — Ducis 1883, s. 7, gdzie jednak znajduje się tylko pierwsza część definicji przytoczonej przez J. Woleńskiego: *[...] veritas est adaequatio rei et intellectus.*

[74]Por. J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 174.

[75]Por. tamże, s. 208 i 212.

[76]W pracy A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Warszawskie Towarzystwo Naukowe, Warszawa 1933. Praca ta znajduje się także w: A. Tarski, *Pisma logiczno–filozoficzne*, t. 1: *Prawda*, PWN, Warszawa 1995, s. 13–172.

[77]Por. J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 212–221, a także *Mała encyklopedia logiki*, hasło: „Prawda", s. 215–217.

[78]Por. A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, [w:] A. Tarski, *Pisma logiczno–filozoficzne*, t. 1: *Prawda*, PWN, Warszawa 1995, s. 157–158.

szym głównym zadaniem jest poszukiwanie prawdy [...] Byłem zakłopotany pojęciem prawdy [...] powiadając, że jeśli chcemy, możemy uniknąć go w metodologii nauk na rzecz dedukowalności i podobnych relacji logicznych"[79]. Popper uważa, że definicja Tarskiego może potwierdzić stanowisko realizmu: „Teoria Tarskiego, jak wszyscy wiecie i jak on sam pierwszy podkreślił, jest rehabilitacją i szczegółowym opracowaniem teorii klasycznej, że prawda jest korespondencją z faktami; i to wydaje mi się potwierdzać realizm metafizyczny"[80]. A. Chalmers uważa jednak, że te wnioski Poppera wynikają ze wzbogacenia technicznego aparatu Tarskiego o zdroworozsądkowe pojęcie prawdy i że argumenty Poppera nie wystarczają do uzasadnienia, że prawda jest celem nauki[81]. Całkowicie odmiennego zdania niż Popper był sam Tarski, który — choć liczył na zainteresowanie ze strony filozofów — był bardziej niż ostrożny w przewidywaniu filozoficznych konsekwencji swej definicji prawdy. Pisał: „Możemy więc przyjąć semantyczną koncepcję prawdy nie porzucając własnego stanowiska epistemologicznego, jakiekolwiek by ono było; możemy pozostać naiwnymi realistami, krytycznymi realistami lub idealistami, empirystami lub metafizykami — kimkolwiek byliśmy przedtem. W stosunku do tych wszystkich spraw semantyczna koncepcja prawdy jest całkowicie neutralna"[82]. Takie stanowisko było być może konsekwencją sceptycyzmu Tarskiego odnośnie do możliwości rozwiązania (czy nawet poprawnego sformułowania) problemu prawdy na gruncie filozofii. Autor semantycznej teorii prawdy pisał nawet: „Ogólnie rzecz biorąc, nie sądzę, że istnieje coś takiego jak 'filozoficzny problem prawdy'"[83]. Niezależnie od zaprezentowanego tu stanowiska Tarskiego jego teoria prawdy bez wątpienia oddziałała na filozofów, wzmacniając pozycję tradycyjnej korespondencyjnej teorii prawdy (choćby przez pokazanie, że stanowisko tradycyjne nie musi prowadzić do antynomii) i usuwając niektóre wątpliwości wobec realizmu ontologicznego i epistemologicznego.

W epistemologii obok korespondencyjnej teorii prawdy istniały już przed publikacją wyników Tarskiego inne próby rozwiązania problemu prawdy: teoria koherencyjna i teoria pragmatyczna. Pragmatyczna teoria prawdy,

---

[79] Cyt. za: J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 207.

[80] Cyt. za: J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 210.

[81] Por. A. Chalmers, *Czym jest to, co zwiemy nauką? Rozważania o naturze, statusie i metodach nauki. Wprowadzenie do współczesnej filozofii nauki*, Siedmioróg, Wrocław 1993, s. 193–194.

[82] A. Tarski, *Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki*, [w:] A. Tarski, *Pisma logiczno–filozoficzne*, t. 1: *Prawda*, PWN, Warszawa 1995, s. 267.

[83] Tamże, s. 267.

pochodząca od W. Jamesa (1842–1910), była przez swego twórcę stosowana głównie w dziedzinie poglądów religijnych. Przeniesiona na grunt badań naukowych stwierdza ona, że te teorie można uznać za prawdziwe, które okazują się „dobre” w praktyce[84]. Pragmatyczne kryterium prawdy jest na tyle niejasne i nieprecyzyjne, że — jak się wydaje — nie może stanowić poważnej konkurencji dla korespondencyjnej teorii prawdy, przynajmniej w matematyce (kryterium to akceptuje na przykład Quine, stosując je nie do pojedynczych twierdzeń, lecz do całych teorii matematycznych[85]). Koherencyjna teoria prawdy, której pewne elementy można znaleźć już u wcześniejszych myślicieli, poczynając od Kartezjusza, została sformułowana po raz pierwszy wyraźnie przez Bradleya na przełomie XIX i XX wieku (na gruncie neoheglizmu), a potem rozwinięta na gruncie empiryzmu logicznego przez O. Neuratha i C. Hempla i jest nadal dość popularna (na przykład Quine uważa ją za konkurencyjną w stosunku do koncepcji klasycznej)[86]. Według teorii koherencyjnej prawdziwość (lub fałszywość) nie przysługuje izolowanym zdaniom, lecz zdaniom traktowanym jako elementy pewnego systemu twierdzeń. Zdanie jest prawdziwe, jeśli dołączone do pewnego systemu twierdzeń tworzy z nim spójną całość (przy czym chodzi o coś więcej, niż tylko niesprzeczność; kryteria prawdziwości nie zostały dotąd precyzyjnie i jednoznacznie ustalone)[87]. Jednym z najpoważniejszych zarzutów przeciw tej teorii prawdy jest fakt, że dwa różne systemy zdań (np. sformalizowane systemy aksjomatyczne) mogą być wewnętrznie koherentne, a równocześnie sprzeczne ze sobą[88]. J. Woleński podaje w swej pracy *Metamatematyka a epistemologia* także inne argumenty przeciwko koherencyjnej teorii prawdy, oparte na wynikach badań metamatematycznych[89].

Niezwykle istotnym zagadnieniem filozoficznym jest spór realizm — antyrealizm (lub realizm — idealizm). Można mówić o realizmie ontologicznym (w filozofii matematyki takim realizmem jest platonizm) oraz o realizmie epistemologicznym (ostatnio rozważa się także tak zwany realizm semantyczny). Często spotykany jest pogląd, że realizm epistemologiczny pociąga za sobą realizm ontologiczny, ale nie odwrotnie[90]. Woleński polemizuje z powyższym przekonaniem. Autor ten definiuje realizm epistemolo-

[84] Por. *Mała encyklopedia logiki*, hasło: „Prawda”, s. 216–217.
[85] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 138.
[86] Por. J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 270.
[87] Por. *Mała encyklopedia logiki*, hasło: „Prawda”, s. 216.
[88] Por. J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, s. 276–277.
[89] Por. tamże, s. 270–284.
[90] Por. tamże, s. 285–289.

giczny jako pogląd filozoficzny uznający, że przedmiot poznania jest transcendentny wobec podmiotu poznania. Woleński uważa, że tak rozumiany realizm epistemologiczny jest konsekwencją interpretacyjną twierdzeń limitacyjnych (twierdzenia Tarskiego o niedefiniowalności prawdy i twierdzenia o niedefiniowalności semantyki w składni), jednak sądzi, że nie można uzasadnić w ten sposób realizmu ontologicznego[91]. Jest to kolejna ilustracja wpływu teorii podstaw matematyki na stanowisko w kwestiach filozoficznych.

W bliskim związku z epistemologią matematyki pozostaje doniosły problem niezwykłej skuteczności matematyki w poznawaniu i opisywaniu fizycznego świata. Dlaczego przyroda jest matematyczna? I dlaczego nasz umysł myśli matematycznie? Dlaczego jest zdolny do odkrywania matematycznych struktur przyrody? Są to pytania wykraczające poza filozofię matematyki, należące już do dziedziny filozofii przyrody. Jednak ewentualne odpowiedzi na te pytania mają niebagatelne znaczenie także dla filozofii matematyki.

M. Heller w swej książce *Szczęście w przestrzeniach Banacha* pisze: „Matematyka nie jest nauką doświadczalną, ale sama jest doświadczeniem. Zarówno doświadczeniem całej ludzkości, jak i doświadczeniem każdego 'liczącego człowieka' z osobna"[92]. Nieco dalej autor wyciąga następujące wnioski z dotychczasowego zmagania się ludzkich umysłów z problemem matematycznego doświadczenia:

(1) „Problem matematycznego doświadczenia jest głęboko nietrywialnym zagadnieniem; zawiera on przynajmniej dwie rzeczywiste składowe, a mianowicie:"

(2) „Pytanie o naturę matematyki: co takiego mieści się w samej matematyce, że jej rozumowania uważamy za niezawodne, a jej twierdzenia za całkowicie bezpieczne?"

(3) „Pytanie o naturę naszego poznania matematycznego: co takiego mieści się w strukturze naszego umysłu, że uznaje on bez zastrzeżeń nieuniknioność wniosków poprawnie wyprowadzonych z przyjętych założeń na podstawie uznanych reguł wnioskowania? Krótko: dlaczego umysł myśli matematycznie?"[93]

Badania podstaw matematyki mają doniosłe znaczenie w poszukiwaniu odpowiedzi na te pytania.

[91] Por. tamże, s. 300–302.
[92] M. Heller, *Szczęście w przestrzeniach Banacha*, s. 74.
[93] Tamże, s. 82.

3. Zagadnienia aksjologiczne

Aksjologia matematyki, według Lubomirskiego, powinna być rozumiana jako teoria wszelkiego rodzaju wartości regulujących proces poznania matematycznego w jego historycznym rozwoju w różnych epokach. Lubomirski wymienia takie wartości, jak: „ścisłość, naturalność (definicji, rozumowania), efektywność (dowodu, konstrukcji), pomysłowość, intuicyjna oczywistość, elementarność użytych (w dowodzie lub konstrukcji) środków, formalna skuteczność rozumowania, czytelność (definicji, twierdzenia czy dowodu) [...] wreszcie ogólność (pojęcia, twierdzenia, konstrukcji, metody dowodowej itp.)”[94]. Autor ten jest zdania, że tak rozumiana aksjologia matematyki powinna stać się niezbędnym uzupełnieniem epistemologii matematyki[95]. Wydaje się, że aksjologia mogłaby też stanowić filozoficzną refleksję uzupełniającą metamatematykę jako teorię dowodu.

Wątki aksjologiczne towarzyszą niewątpliwie myśli matematycznej poprzez cały okres jej historycznego rozwoju. Już matematycy starożytnej Grecji wypracowali pewien styl uprawiania matematyki, w którym wartości takie jak naturalność i oczywistość założeń oraz ścisłość rozumowania i dowodzenia odgrywały zasadniczą rolę. Można zaryzykować twierdzenie, że matematyka narodziła się właśnie dzięki dokonaniu wyboru tych wartości. Dlatego ani rachunkowe umiejętności Babilończyków, ani geodezyjne sprawności Egipcjan nie były jeszcze „matematyką” w pełnym znaczeniu tego słowa[96], natomiast z całą pewnością zasługuje na to określenie matematyka grecka. Zasadniczą rolę w kształtowaniu się europejskiej myśli matematycznej odegrała filozofia Platona. W systemie Platona ogromną rolę odgrywają pojęcia piękna i doskonałości. Są to pojęcia właściwie z pogranicza aksjologii i matematyki, gdyż ich istotę Platon dostrzegał w proporcji i symetrii[97]. To właśnie szukanie doskonałości kazało Platonowi umieścić byty matematyczne w świecie idei, a nie w świecie rzeczy i głosić, że prawdziwa nauka nie ma nic wspólnego z praktyką[98]. Platon był także twórcą metody aksjomatycznej[99], która — rozwinięta przez Euklidesa (nie bez wpływu metodologii

[94] A. Lubomirski, *O uogólnianiu w matematyce*, s. 49.
[95] Por. tamże, s. 49–50.
[96] Por. M. Heller, *Uchwycić przemijanie*, Znak, Kraków 1997, s. 27–31.
[97] Por. tamże, s. 36–37.
[98] Por. tamże, s. 32–33, a także R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 31.
[99] Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 24.

Arystotelesa, zwłaszcza gdy chodzi o definicje[100]) w słynnych *Elementach* — była jednym z największych osiągnięć greckiej matematyki. *Elementy* Euklidesa stały się wzorem ścisłości rozumowania i elegancji dowodzenia matematycznego na długie wieki, choć z dzisiejszego punktu widzenia zawierają sporo luk, odwołań do intuicji i prawd „oczywistych”[101]. W doborze aksjomatów i postulatów Euklides kierował się zasadą maksymalnej prostoty i oczywistości.

Powszechnie znana jest historia V postulatu Euklidesa o równoległych. To właśnie fakt, że postulat ten nie jest tak jasny i oczywisty jak pozostałe postulaty i aksjomaty Euklidesa (gdyż mówi o czymś, co dzieje się dowolnie daleko), spowodował liczne nieudane próby wyprowadzenia V postulatu z pozostałych, uwieńczone powstaniem geometrii nieeuklidesowych w XIX wieku i dowodem niezależności V postulatu od innych pewników systemu Euklidesa. V pewnik Euklidesa do tego stopnia niepokoił matematyków, że począwszy od Geminosa (matematyka wspomnianego przez X–wiecznego komentatora arabskiego) aż po Legendre'a w XIX wieku wielu matematyków ogłaszało „dowody” V postulatu, które wkrótce okazywały się fałszywe. „Dowód” Legendre'a dostał się nawet do podręczników szkolnych, a po odkryciu jego fałszywości autor wycofał go wprawdzie, ale obmyślił następne, równie fałszywe „dowody”[102]. Wszystkie te próby uniknięcia V postulatu ukazują, jak wielkie znaczenie w praktyce matematycznej odgrywają wartości takie, jak jasność i oczywistość.

We współczesnej filozofii matematyki aksjologia pełni także znaczącą rolę. Klasyczne kierunki filozofii matematyki: logicyzm, intuicjonizm i formalizm wyrosły z pragnienia zapewnienia matematyce „niewzruszalnych podstaw”, „pewności”, „bezpieczeństwa”, „niesprzeczności” itp. Wśród tych postulatów są takie, które można analizować metodami metamatematyki (na przykład niesprzeczność, zupełność), ale są i takie, które należą do dziedziny tradycyjnie rozumianej aksjologii. Trzeba zauważyć, że także badania nad podstawami matematyki zrodziły się z pragnienia zapewnienia matematyce tej ścisłości, pewności i niezawodności, o jakiej marzą matematycy, a która jest wartością w pewnej mierze „nieuchwytną” dla metod samej matematyki i wymaga refleksji filozoficznej.

Dyskusja nad rolą pewnika wyboru w teorii mnogości może być uważana w pewnym sensie za współczesny odpowiednik historycznej dyskusji

[100]Por. tamże, s. 32.
[101]Por. tamże, s. 33.
[102]Por. S. Kulczycki, *Geometria nieeuklidesowa*, PWN, Warszawa 1960, s. 21–42.

nad V postulatem Euklidesa. Pewnik wyboru budzi kontrowersje, gdyż ma zupełnie inny charakter niż pozostałe aksjomaty teorii mnogości Zermela–Fraenkla. Jest to pewnik niekonstruktywny, postulujący istnienie pewnego zbioru bez podawania o nim jakichkolwiek bliższych informacji. Dlatego też były liczne próby udowodnienia pewnika wyboru na podstawie pozostałych aksjomatów teorii mnogości, jednak udowodniono w gruncie rzeczy co innego: niezależność pewnika wyboru (analogicznie, jak w przypadku V postulatu Euklidesa). Pewnik wyboru jest z jednej strony konieczny do dowodu wielu ważnych twierdzeń, z drugiej strony jednak prowadzi do pewnych (pozornie?) paradoksalnych wniosków; na przykład jego konsekwencją jest twierdzenie Banacha–Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli. Dlatego podejmowane są próby zastąpienia pewnika wyboru jakimś innym aksjomatem[103]. Podobne dyskusje są toczone także wokół wspomnianej wyżej hipotezy *continuum*. Wszystko wskazuje na to, że na obecnym etapie prac nad podstawami matematyki wybór aksjomatów jest sprawą dość arbitralną i uzależnioną od czynników aksjologicznych. Murawski pisze na ten temat: „A. Kanamori i M. Magidor proponują przyjęcie nowych aksjomatów nieskończoności albo na zasadach ‘teologicznych’, albo w sposób czysto formalny, na zasadzie kierowania się tylko ‘wartościami estetycznymi’ siatki ich konsekwencji i wzajemnych powiązań”[104]. A — w odróżnieniu od V postulatu Euklidesa — chodzi tu nie tylko o geometrię, gdyż teoria mnogości jest uważana za fundamentalną teorię całej matematyki.

Matematycy często mają doświadczenie obcowania z rzeczywistością, którą „odkrywają”, a nie „tworzą”, dlatego platonizm jest w praktyce matematycznej częstym stanowiskiem. Dużą rolę w tym doświadczaniu matematycznego „odkrywania” odgrywa poczucie piękna matematycznych obiektów. Na przykład R. Penrose, współczesny platonik, dostrzega w matematyce „dzieła boże” i „dzieła ludzkie”. Niezwykle bogata i piękna struktura niektórych matematycznych obiektów każe je zakwalifikować jako „dzieło boże”, które „odkrywamy”. Są też w matematyce dalekie od jednoznaczności i sztuczne konstrukcje matematyków, nie mające owego matematycznego piękna i te Penrose nazywa „dziełami ludzkimi”[105].

A. L. Hammond w pięknym eseju *Matematyka — nasza niedostrzegalna kultura* zamieszcza jako głos w dyskusji wypowiedź matematyka L. Bersa:

[103]Por. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, s. 177–183.
[104]Tamże, s. 188.
[105]Por. R. Penrose, *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, s. 316–319.

„Umysł ludzki jest skonstruowany w ten sposób, że gdy mamy do czynienia z matematyką odnosimy wrażenie dotykania czegoś rzeczywistego. Są pewne fragmenty matematyki, które są bardziej rzeczywiste od innych. Dla mnie wartość teorii matematycznej zależy od tego, w jakim stopniu dotyczy ona rzeczy zrobionych, w jakimś sensie, przez Boga, a nie przez człowieka”[106]. W tym samym eseju Hammond pisze: „Matematyka zawsze była uważana za gałąź wiedzy, za ekstrakt czystej myśli. Bez wątpienia wykazała ona swą głęboką użyteczność, może nawet niezbędność w konstrukcji nowoczesnego gmachu wiedzy i w jej technologicznych plonach. Ale sami matematycy z uporem mówią o swej dziedzinie w terminach sztuki — piękno, elegancja, prostota — i powołują się na analogie z malarstwem i muzyką. Wielu matematyków będzie z zapałem zaprzeczać twierdzeniom, jakoby ich prace miały być użyteczne lub też w jakimkolwiek stopniu motywowane możliwościami praktycznych zastosowań”[107]. I nieco dalej: „Wielki matematyk francuski Henri Poincaré pisał o ‘odczuciu matematycznego piękna, harmonii liczb i kształtów, geometrycznej elegancji. Są to odczucia czysto estetyczne, znane wszystkim prawdziwym matematykom’”[108]. „[...] Jednym z gorących orędowników estetycznego aspektu matematyki był angielski teoretyk liczb Godfrey Hardy, który szczycił się tym, że nigdy nie zrobił nic użytecznego w sensie praktycznych zastosowań. Hardy określał matematyków jako twórców wzorców i idei. Twierdził on, że dla nich, podobnie jak dla innych artystów, ‘piękno i dostojeństwo są kryteriami, przy pomocy których należy oceniać ich dzieła’. Piękno, mówił, ‘jest pierwszym sprawdzianem; nie ma na świecie trwałego miejsca dla brzydkiej matematyki’”[109].

Pojęcie piękna i elegancji odgrywa bardzo istotną rolę także w samej konstrukcji (od strony technicznej) teorii i prac matematycznych. Matematycy z reguły bardzo dbają o elegancję swych prac. Jako jeden z wielu możliwych przykładów może tu posłużyć sformułowanie tak zwanego zasadniczego twierdzenia algebry. Nazwą tą określa się dziś twierdzenie: (1) Każdy wielomian stopnia dodatniego o współczynnikach zespolonych ma w ciele liczb zespolonych $\mathbf{Z}$ co najmniej jeden pierwiastek[110].

[106] A. L. Hammond, *Matematyka — nasza niedostrzegalna kultura*, [w:] *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, red. L. A. Steen, WNT, Warszawa 1983, s. 31.
[107] Tamże, s. 27.
[108] Tamże, s. 33.
[109] Tamże, s. 34.
[110] Por. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1958, s. 211.

Rzecz w tym, że prawdziwe jest także twierdzenie mocniejsze: (2) Każdy wielomian stopnia $n \geq 1$ o współczynnikach zespolonych ma w ciele liczb zespolonych dokładnie n pierwiastków (z uwzględnieniem krotności pierwiastków)[111].

Dlaczego więc nie nazwać (2) „zasadniczym twierdzeniem algebry"? Wydaje się, że głównym powodem są — obok racji metodologicznych — względy matematycznej elegancji. Twierdzenie (1) wymaga skomplikowanego dowodu, który dość długo był poszukiwany przez matematyków, a znalezienie poprawnego dowodu przez Gaussa na przełomie XVIII i XIX wieku stanowiło poważne osiągnięcie[112].

Twierdzenie (2) wynika z (1) niemal natychmiast. Choć twierdzenie (2) jest „mocniejsze" w tym sensie, że mówi więcej o pierwiastkach wielomianu, twierdzenie (1) jest bardziej „podstawowe", stanowi „ważniejszy" etap matematycznego odkrycia. Elegancja matematyczna wymaga podkreślenia jego roli przez uznanie właśnie (1) za „zasadnicze twierdzenie algebry".

* *
*

Tak więc, mimo dużego zbliżenia współczesnej filozofii matematyki do teorii podstaw matematyki, można w filozofii matematyki wyodrębnić zagadnienia „typowo filozoficzne", nie dające się zredukować do matematyki. Do takich „typowo filozoficznych" zagadnień należą problemy ontologiczne, epistemologiczne i aksjologiczne. Dlatego, chociaż matematyka jest dyscypliną naukową, która w pewnym zakresie może badać samą siebie (w tym sensie na przykład metamatematyka, rozumiana jako teoria dowodu, należy do matematyki), filozofia matematyki nie jest częścią matematyki. Oczywiście między refleksją filozoficzną a badaniami matematycznymi zachodzą rozliczne związki i wzajemne zależności.

---

[111] Por. tamże, s. 217.
[112] Por. tamże, s. 211.