UWAGI I KOMENTARZE

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXIII / 1998, s. 129–132*

Lech GRUSZECKI

TEOREMAT BANACHA–TARSKIEGO

W numerze XVIII (1996) „Zagadnień Filozoficznych w Nauce" (ss. 100–103) ukazał się artykuł Marcina Skulimowskiego pt. Paradoksalny rozkład kuli*. W nawiązaniu do tego artykułu poniżej zamieszczamy tekst, jaki nadesłał nam dr Lech Gruszecki z Katedry Matematyki Stosowanej Politechniki Lubelskiej.*

*

Twierdzenie (teoremat) Banacha–Tarskiego o paradoksalnym rozkładzie kuli przedstawiane jest zazwyczaj w literaturze matematycznej lub filozoficzno–matematycznej jako konsekwencja aksjomatu wyboru (por. np. [K–M], [Mu], [S]). Diagnoza ta jest, jak się wydaje, pewnym uproszczeniem. Dowód twierdzenia Banacha–Tarskiego wymaga bowiem odwołania się nie tylko do pewnika wyboru, ale i do innych pojęć, które, chociaż w przeciwieństwie do aksjomatu wyboru uznawane są za naturalne, przy bliższej analizie okazują się dość problematyczne.

Przypomnijmy wypowiedź rozważanego przez nas twierdzenia (por. również [K–M], [B–T]). Niech K będzie trójwymiarową sferą o promieniu równym jeden. Niech ponadto X i Y będą dowolnymi podzbiorami K. Mówimy, że X przystaje do Y zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje taki obrót φ sfery wokół środka, że $\varphi(X) = Y$. O zbiorach X i Y mówimy, że przystają przez rozkład skończony, co zapisujemy symbolicznie $X \approx Y$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją rozłączne zbiory $X_1, \ldots, X_n$ oraz rozłączne zbiory $Y_1, \ldots, Y_n$ o tej własności, że $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n, Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ oraz dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, n$, X_i przystaje do Y_i.

Twierdzenie Banacha–Tarskiego orzeka, że sfera K daje się przedstawić jako suma mnogościowa rozłącznych zbiorów X i Y takich, że $X \approx K$

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

oraz że $Y \approx K$. Można wykazać, że twierdzenie zachodzi również dla kuli domkniętej (lub otwartej).

W dowodzie twierdzenia korzysta się między innymi z aksjomatu wyboru, który stwierdza, że dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych i rozłącznych istnieje zbiór, który ma dokładnie po jednym elemencie wspólnym z każdym ze zbiorów należących do tej rodziny. Aksjomat wyboru został sformułowany w 1904 r. przez E. Zermelo i od razu wzbudził kontrowersję. Wielu matematyków (np. Borel, Lebesgue) wskazywało na jego niekonstruktywny charakter; inni (np. Hausdorff, Fraenkel) przyjmowali ten aksjomat bez zastrzeżeń, nadając mu ten sam status, co innym pewnikom teorii mnogości. Trzeba przy tym zaznaczyć, że aksjomat wyboru jest niezbędny w dowodzie równoważności definicji Heinego i Cauchy'ego ciągłości funkcji oraz w dowodach kilku kluczowych twierdzeń różnych działów matematyki, np. w dowodach twierdzenia Tichonowa o zwartości produktu przestrzeni zwartych i twierdzenia Hahna–Banacha.

W dowodzie twierdzenia Banacha–Tarskiego pewnik wyboru zastosowany jest do rodziny podzbiorów sfery K, przy czym zakłada się, że $K \subset \mathbf{R}^3$. Właśnie to założenie, tzn. utożsamienie rzeczywistej przestrzeni fizycznej z trójwymiarową przestrzenią euklidesową może być źródłem paradoksalności twierdzenia. Wiadomo przecież, że przestrzeń $\mathbf{R}^3$ posiada własności, które mogą nie przysługiwać przestrzeni fizycznej. Przestrzeń euklidesowa jest nieskończenie podzielna, zupełna i spójna. Własności te czasem określa się jednym słowem: ciągłość (por. [Mi]). Współczesne nauki fizyczne wskazują jednak, że przestrzeń, w której żyjemy, ma strukturę dyskretną; ciągłość jest raczej wygodną formą ujmowania rzeczywistości przez nasz umysł. Dowód twierdzenia Banacha–Tarskiego opiera się natomiast na wykorzystaniu całego „bogactwa" zbioru liczb rzeczywistych, w szczególności na realistycznym traktowaniu liczb niewymiernych, którym mają odpowiadać punkty w przestrzeni (dla przykładu można wspomnieć, że dowód wymaga konstrukcji pewnej grupy obrotów sfery K; podstawą tej konstrukcji jest m. in. obrót wokół jednej z osi układu współrzędnych o kąt będący niewymierną wielokrotnością 2π).

Problem istnienia liczb niewymiernych, jak wiadomo, budził wiele emocji w przeszłości. Starożytni Grecy uniknęli rozważania tego pojęcia poprzez sprowadzenie algebry do geometrii. W okresie późniejszym (zwłaszcza od czasu rozkwitu algebry we Włoszech w XVI w.) liczby niewymierne wprawdzie były stosowane, ale ich status pozostawał niejasny aż do drugiej połowy XIX w., kiedy to zostały przedstawione niezależnie przez Weierstrassa, De-

dekinda i Cantora różne metody wprowadzania liczb rzeczywistych. Wszystkie one opierały się na postulowaniu analogii pomiędzy konstruowanym jako uzupełnienie zbioru liczb wymiernych zbiorem liczb rzeczywistych a prostą geometryczną. R. Dedekind pisał: „[...] porównanie dziedziny **R** liczb wymiernych i linii prostej doprowadziło do stwierdzenia istnienia luk, niezupełności czy nieciągłości tej pierwszej, podczas gdy prostej przypisujemy zupełność, brak luk czyli ciągłość” (por. [D]).

O ile teoria liczb rzeczywistych stworzona w ubiegłym wieku jest operacyjnie użyteczna, to intuicje geometryczne, które (wraz z szeregiem zagadnień analizy matematycznej) przyczyniły się do jej powstania, są dziś poddawane w wątpliwość. Zwróćmy uwagę również i na to, że proces kształtowania matematycznego modelu przestrzeni fizycznej odbywa się przy użyciu pojęć logicznych, które powstają w oparciu o doświadczenie wielkości skończonych. Czy tak powstała struktura pojęć logicznych może być przeniesiona na obiekty nieskończone? Czy same zwroty kwantyfikatorowe nie sugerują punktowej budowy przestrzeni? Czy logika klasyczna wraz ze swoimi prawami jest tu adekwatna?

Jak widać przy konstruowaniu właściwego modelu świata rzeczywistego należy poddać refleksji najbardziej podstawowe intuicje geometryczne, logiczne i algebraiczne. Jak w związku z tym należy traktować twierdzenie Banacha–Tarskiego? Czy wskazuje ono tylko na paradoksalne konsekwencje aksjomatu wyboru? Sądzę, że teza twierdzenia falsyfikuje całą użytą w tym przypadku koncepcję przestrzeni, inaczej mówiąc adekwatność matematycznego modelu, jakim jest algebraiczno–topologiczna struktura zbioru **R**.

Bibliografia

B–T Banach S., Tarski A., *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*, „Fundamenta Mathematicae” 6: 1924, 244–277.

D Dedekind R., *Ciągłość i liczby niewymierne* (tłum. R. Murawski) [w:] Murawski R., *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 1994.

K–M Kuratowski K., Mostowski A., *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa, 1952.

Mi Mioduszewski J., *Ciągłość. Szkice z historii matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1996.

Mu Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa, 1995.

S Skulimowski M., *Paradoksalny rozkład kuli*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 18: 1996.