ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXIV / 1999, s. 135–140*

Michał HELLER

CZY MATEMATYKĘ DA SIĘ WYELIMINOWAĆ Z FIZYKI?

- T. Bigaj, *Matematyka a świat realny*, Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1997, ss. 157.

Książka ta, jak pisze autor, „jest poprawioną wersją mojej rozprawy doktorskiej", obronionej w Instytucie Filozofii Uniwersytetu Warszawskiego w 1996 r. Warto zaznaczyć od razu na wstępie: książka jest warta uważnego przestudiowania; wnosi ona wiele cennych analiz do często jałowych sporów na temat tzw. matematyczności świata. Marian Przełęcki, recenzent rozprawy, pisze: „W swych wywodach autor realizuje najlepsze wzorce filozofii analitycznej, w szczególności tego jej stylu, który jest charakterystyczny dla Szkoły Lwowsko–Warszawskiej" (fragment recenzji na okładce). Treść książki jest bogata, zawiera wiele wątków, składających się na pewną spójną całość. Spośród tych wątków wybiorę trzy, specjalnie mnie interesujące, na których w dalszym ciągu skupię swoją uwagę.

1. Co to jest matematyka? Pytanie to stanowi dla autora zagadnienie wstępne, które trzeba rozpatrzyć, zanim przystąpi się do próby zrozumienia skuteczności matematyki w jej zastosowaniach do badania „świata realnego". Od takiej czy innej odpowiedzi na to pytanie w znacznym stopniu zależy wynik dalszych analiz. Tomasz Bigaj od początku koncentruje swoją uwagę na zaksjomatyzowanych teoriach matematycznych, co w pewien sposób polaryzujejego punkt widzenia, redukując pytanie o „naturę wiedzy matematycznej" do pytania o status aksjomatów. Autor za „zasadniczo słuszną" (choć „nie pozbawioną wielu uproszczeń") uważa następującą koncepcję: „Wiedza matematyczna, że p, zostaje sprowadzona do wiedzy czysto logicznej: że „p" wynika logicznie z zestawu postulatów znaczeniowych. Ponieważ nie nakładamy poza wymogiem niesprzeczności żadnych ograniczeń na przyjmowane postulaty znaczeniowe, ich wybór jest kwestią

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

badacza. Zatem nie można powiedzieć, że aksjomaty danej teorii wyrażają pewną wiedzę o rzeczywistości pozajęzykowej. Wyrażają one wyłącznie wiedzę o tym, w jaki sposób umawiamy się stosować dane terminy. Konkludując, można więc powiedzieć, że w myśl obecnie charakteryzowanego poglądu, matematyka to konwencje znaczeniowe plus logika" (ss. 23–24).

Najogólniej rzecz ujmując, źródłem pewności aksjomatów jest to, że określają one znaczenia terminów w nich występujących, ale w aksjomatach należy wyróżnić składnik analityczny i składnik syntetyczny. „[...] składnik syntetyczny danego postulatu aksjomatyzuje wszystkie konsekwencje tego postulatu, nie zawierające terminów definiowanych, a składnik analityczny nie ma żadnych takich konsekwencji, poza tautologiami" (s. 31). Składnik syntetyczny głosi więc, że „istnieją denotacje terminów pierwotnych danej teorii (s. 33), lubjeszcze inaczej, określa on „zobowiązania ontologiczne danej teorii" (s. 35).

Takie formalistyczne spojrzenie na matematykę niewątpliwie ułatwia zadanie, umożliwiając przeprowadzenie w miarę ścisłych analiz, ale natychmiast ustawia cały program „w duchu logistycznym", oddalając go tym samym od twórczej praktyki naukowej. A przecież właśnie ta praktyka stawia problem skuteczności matematyki w badaniu świata. Gdyby nie ona, problemu w ogóle byśmy nie postawili. Nie jest to zarzut skierowany do autora omawianej książki, pod warunkiem, iż zgodzi się on z tym, że przeprowadzone przez niego analizy dotyczą tylko części problemu, zapewne części bardzo istotnej, bo dokonującej wstępnego uporządkowania i logicznego przygotowania gruntu, ale jednak tylko części bardzo złożonego zagadnienia.

2. Czy matematyka jest nietwórcza? Nie będziemy tu wdawać się w problemy związane z formalnym zdefiniowaniem nietwórczości matematyki (por. ss. 71n). W odniesieniu do fizyki problem sprowadza się do tego, czy sam fakt stosowania matematyki w fizyce jest w stanie dostarczyć nowych informacji, które nie byłyby zawarte w wynikach doświadczalnych, będących podstawą danej teorii fizycznej. Autor przytacza następujący argument często przywoływany na rzecz nietwórczości matematyki. Prawdziwość matematyki nie może zależeć od faktów przygodnych. Gdyby matematyka była twórcza, implikowałaby pewne zdania nietautologiczne, odnoszące się do jakiegoś faktu nie matematycznego czyli przygodnego. Mogłoby się okazać, że zdanie jest fałszywe, a więc dana teoria matematyczna zostałaby sfalsyfikowana. Argument pozornie trafny, ale — jak słusznie zauważa autor — przesłanka, że „każde nietautologiczne twierdzenie wyrażone w języku pozamatematycznym stwierdza pewien fakt przygodny" (s. 76), jest wątpliwa. Można by na przykład domyślać się, że bardzo głębokie prawa fizyki nie odnoszą się do sytuacji przygodnych. Na przykład niektórzy zwolennicy tzw.

teorii wszystkiego utrzymują, że gdy teoria ta wreszcie zostanie odkryta, okaże się, iż jest to jedynie możliwa teoria tego rodzaju. W tym sensie nie będzie ona przygodna.

Tomasz Bigaj uważa, że fiasko tego argumentu wcale nie musi oznaczać, że sama koncepcja nietwórczości matematyki jest nieprawdziwa. Istnieją bowiem „bardziej formalne" dowody nietwórczości matematyki pod warunkiem, że przyjmie się założenie „o redukowalności całej matematyki stosowanej do teorii mnogości Z–F [Zermelo–Fraenkla] z elementami pierwotnymi i słownictwem pozamatematycznym" (s. 77). Należy jednak podkreślić, że założenie o redukowalności matematyki, wykorzystywanej w fizyce, do teorii mnogości Z–F, jest bardzo mocne i wcale nie musi być prawdziwe. Znam przynajmniej kilku poważnych fizyków, którzy by bronili tezy o twórczości matematyki w fizyce. Ich zdaniem, „naddatku informacyjnego" (w porównaniu z wyjściowymi danymi obserwacyjnymi), mieszczącego się w bogatych teoriach fizycznych, nie da się przypisać tylko „dedukcyjnej sile" rozumowań matematycznych, lecz musi on być wynikiem autentycznego tworzenia informacji. Istnienie twierdzeń limitacyjnych (zwłaszcza twierdzeń Gödla) mogłoby służyć jako dodatkowy argument na rzecz tezy, że bogate systemy matematyczne nie są tylko maszynką do produkowania dedukcyjnych wniosków. Fakt, że w książce tej autor tak mało uwagi poświęcił twierdzeniom limitacyjnym, można zapewne wytłumaczyć tym, iż chciał on zachować pewien poziom ścisłości swoich analiz, a — jak wiadomo — problemy interpretacyjne związane z twierdzeniami limitacyjnymi cieszą się pod tym względem raczej złą sławą. Niemniej jednak wydaje się, że zastanawiając się nad twórczością lub nietwórczością matematyki, nie można się obejść bez poważniejszych odniesień do twierdzeń limitacyjnych.

3. Czy matematykę można wyeliminować z fizyki? Gdyby matematyka była rzeczywiście nietwórcza w zastosowaniach do fizyki, można by ją bez szkody usunąć z tej gałęzi nauki. Gdyby tak było, mielibyśmy prawo stwierdzić, że „w pewnym sensie, matematyka stosowana w taki sposób nie wnosi 'nic nowego' (nie wnosi żadnych — w sensie 'niematematycznych' — konsekwencji, które nie wynikałyby już z przyjętych założeń). Jedyną zatem korzyścią matematyki byłoby ewentualne uproszczenie rozumowań w obrębie języka jakościoweąo" (s. 78). Pierwszą reakcją fizyka na myśl o wyeliminowaniu matematyki z uprawianej przez niego nauki jest zdumienie, że ktoś w ogóle mógł wpaść na taki pomysł. Jednakże po chwili głębszej refleksji fizyk w następujący sposób zapewne skorygowałby swoją reakcję: Nawet jeżeli matematyka „nie wnosi" do fizyki nic nowego, lecz jedynie ułatwia długie ciągi dedukcji, to czyni to tak skutecznie, że bez jej pomocy większości z tych ciągów nie bylibyśmy w stanie przeprowadzić. A zatem

pomysł usunięcia matematyki z fizyki należy porzucić jako nierealistyczny i szkodliwy.

Zauważmy, że granica pomiędzy dwoma stwierdzeniami: „matematyka nie wnosi do fizyki nic nowego" i „bez pomocy matematyki wielu ciągów dedukcyjnych w fizyce nie bylibyśmy w stanie przeprowadzić", jest dość płynna: narzędzie, bez którego zamierzony skutek byłby nieosiągalny, wnosi jednak coś nowego. Przynajmniej pod względem praktycznym. Postawmy więc pytanie ostrzej: Czy „twórcza" rola matematyki w fizyce sprowadza się tylko do umożliwiania odpowiednio długich łańcuchów dedukcyjnych?

Dyskusja wśród filozofów nauki na ten temat rozpoczęła się od wydanej w 1980 r., głośnej już, książki H. Fielda pt. *Science without numbers* (Princeton University Press), w której autor podjął próbę zrekonstruowania kilku teorii fizycznych bez pomocy matematyki, w języku czysto jakościowym. Wyzwanie to podjął Tomasz Bigaj w artykule *Jakościowe teorie czasoprzestrzeni*, opublikowanym w „Filozofii Nauki" (4, 1995, 33). Nic dziwnego, że przedmiotem prób stały się stosunkowo proste, zgeometryzowane teorie fizyczne (w rodzaju teorii czasoprzestrzeni Galileusza lub Minkowskieąo). Idea polega na tym, by podać układ aksjomatów, w których występowałyby „predykaty empiryczne" (w rodzaju „leży między" lub „jest współliniowy z") i wyprowadzić z nich wszystkie twierdzenia danej teorii. Istotną rzeczą jest przy tym, by wspomniane predykaty empiryczne były zdefiniowane operacyjnie.

Bigaj podchodzi do zagadnienia nie z punktu widzenia fizyka, uprawiającego swoją dyscyplinę, lecz z punktu widzenia logika, który poddaje tę naukę wnikliwej analizie. Rozpatrzmy choćby jeden przykład. Oczywiście można podać definicję odległości między dwoma punktami przy pomocy predykatów empirycznych, tak by odległość ta była wyrażona w liczbach wymiernych (por. s. 101). Wobec istnienia nieuniknionych błędów pomiarowych jest to „w zupełności wystarczające dla zastosowań praktycznych". Okazuje się jednak, że aby omawiana definicja była poprawna, należy założyć, że przestrzeń, w której definiujemy odległość, jest przestrzenią gęstą (pomiędzy każdymi dwoma punktami przestrzeni znajduje się przynajmniej jeden punkt tej przestrzeni). Jeżeli przestrzeń nie byłaby gęsta, pewien warunek, występujący w definicji odległości pomiędzy dwoma punktami, mógłby nie być spełniony. Drobiazgową analizę tego przykładu autor kończy następującym stwierdzeniem: „Na przykładzie tym możemy się wprost przekonać, że fakty wyrażone w języku jakościowym nie determinują jednoznacznie faktów wyrażanych przy pomocy terminów matematycznych. Mimo że wszystkie relacje jakościowe na punktach a, b, c są określone, relacje pomiędzy poszczególnymi odległościami mogą się zmieniać. Zatem możemy w tym momencie zaprzestać bezowocnych poszukiwań metody przekładu języka matematycznego na język jakościowy, nie angażującej nas w ontologiczne twierdzenia o świecie realnym. Okazuje się, że mocne założenia dotyczące struktury świata realnego są niezbędne do przeprowadzenia eliminacji wyrażeń matematycznych z języka nawet najprostszych teorii empirycznych" (s. 106).

Starajmy się jednak podrążyć głębiej. Czy gdyby wysiłki Fielda i jego zwolenników zostały uwieńczone sukcesem, czyli gdyby udało się przetłumaczyć choćby tylko pewne partie fizyki na język czysto jakościowy (w rozumieniu Fielda), nawet kosztem mocnych założeń ontologicznych, czy oznaczałoby to rzeczywiście eliminację struktur matematycznych z fizyki? Odpowiedzi twierdzącej na to pytanie można by udzielić tylko przy bardzo wąskim rozumieniu struktury matematycznej. W matematyce przez „strukturę" na ogół rozumie się „klasę równoważności struktur" lub inaczej: „strukturę z dokładnością do izomorfizmu". Np. wszystkie przestrzenie wektorowe o tym samym, skończonym wymiarze są ze sobą izomorficzne, czyli tworzą jedną klasę równoważności (ze względu na ten izomorfizm), są więc faktycznie jedną strukturą matematyczną (niekiedy nazywa się ją strukturą abstrakcyjną), a poszczególne przestrzenie wektorowe o tym samym, skończonym wymiarze, są tylko konkretnymi reprezentacjami (niejako „wcieleniami") tej jednej abstrakcyjnej struktury. Wielu pseudoproblemów, związanych z kwestią eliminacji matematyki z fizyki, dałoby się uniknąć, gdyby przez strukturę matematyczną konsekwentnie rozumieć strukturę abstrakcyjną, a nie konkretne jej reprezentanty.

Sięgnijmy do istoty zagadnienia i załóżmy, że dysponujemy dwiema wersjami jakiejś teorii fizycznej, np. teorii przestrzeni Galileusza: jedna wersja tradycyjna w języku struktur matematycznych (czyli po prostu w języku matematyki), a druga w języku jakościowym w stylu Fielda. Pomiędzy tymi dwiema wersjami musi istnieć izomorfizm, w przeciwnym bowiem razie nie byłyby to dwie wersje tej samej teorii, lecz dwie różne teorie, co oczywiście rujnowałoby program Fielda. Jeżeli zaś są to dwie wersje izomorficzne, to są one tą samą strukturą matematyczną, posiadającą przynajmniej dwa, rozważane przez nas reprezentanty (reprezentantów może być zresztą znacznie więcej). To, że jeden z tych reprezentantów jest wyrażony przy pomocy języka symboli matematycznych, a drugi przy pomocy języka „jakościowego", nie powinno nas mylić. Język jest tylko „przypadkowym" tworzywem struktury, istotne są elementy strukturalne (a więc „relacyjne"), a te muszą być identyczne we wszystkich reprezentantach tej samej struktury. Co więcej, wyrażenie, „język jakościowy" jest mylące w tym kontekście. Elementy strukturalne — a tylko one się liczą — w reprezentantach obu rozważanych wersji teorii czasoprzestrzeni Galileusza są identyczne, czyli żadna z tych wersji nie jest bardziej jakościowa od druąiej. Wynika stąd, że program Fielda, nawet gdyby był wykonalny w całej pełni, naprawdę nie eliminowałby struktur matematycznych z fizyki. Co więcej, nie miałby z tą eliminacją nic wspólnego. W istocie Field proponuje tylko konstrukcję nowego typu reprezentantów matematycznych struktur, stosowanych w fizyce. Nowość tych reprezentantów polega na tym, że wyrażają one tradycyjne struktury matematyczne w bardziej skomplikowanym i znacznie trudniejszym do operowania języku.

Nie muszę dodawać, że zarysowany powyżej argument wymaga dokładnego wyprecyzowania w stylu analiz przeprowadzanych przez Tomasza Bigaja w omawianej książce. Być może on sam zechce podjąć trud kontynuowania w ten sposób swoich rozważań na temat stosunku matematyki do świata realnego.

Na koniec jeszcze jedna refleksja, również tylko w charakterze „rzuconej myśli”. Jaki mógłby być „mechanizm” dostarczania przez matematykę fizyce istotnie nowych informacji? Wcale nie należy sobie tego wyobrażać w sensie jakiegoś mistycyzmu. Mechanizm ten mógłby być i (prawdopodobnie jest) stosunkowo prosty. Załóżmy, że świat ma jakąś strukturę. Struktura ta jest w większości nam nieznana. Możemy jedynie rozszyfrować pewne jej fragmenty, które ujawniają się (lub lepiej: które odgadujemy), analizując wyniki pewnych pomiarów. Dzięki rozważaniom teoretycznym stwierdzamy, że te odgadnięte fragmenty struktury świata dobrze (w ramach błędów pomiarowych) pasują do fragmentów pewnej struktury matematycznej. Stawiamy więc hipotezę, że i pozostałe części tej struktury matematycznej dobrze pasują do ukrytych dotychczas przed nami części struktury świata. Nad podziw często wyniki nowych pomiarów zgadzają się z wnioskami wyprowadzonymi z tej hipotezy. Jest to klasyczny przykład odgadywania struktury góry lodowej na podstawie tylko tego, co widać nad powierzchnią wody. Dzięki tej metodzie został spenetrowany, na przykład, świat mechaniki kwantowej, który przedtem był dla nas całkiem niedostępny. I takim by pozostał na zawsze, gdyby nie twórcza rola matematyki w fizyce.

Zaproponowane powyżej wyjaśnienie roli matematyki w zastosowaniach fizycznych również opiera się na pewnych założeniach ontologicznych. Ontologii także nie da się wyeliminować z nauki. Nie trzeba jednak być koniecznie zwolennikiem platonizmu, by zgodzić się z Morrisem Kline'm: „Matematyka, która mówi nam rzeczy, o których nigdy byśmy nie wiedzieli, ani nawet nie podejrzewali ich istnienia [...] nie tylko przekracza, lecz wręcz deklasuje percepcję” („Znak” 522, 1998, s. 46).

Michał Heller