ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXVI / 2000, s. 59–65*

Adam OLSZEWSKI

TEZA CHURCHA A TWIERDZENIE GÖDLA

Jednym z najsłynniejszych intelektualnych zdobyczy, mijającego dwudziestego wieku, jest bez wątpienia twierdzenie Gödla (skrót TG)[1]. Mówi ono, że arytmetyka liczb naturalnych i każdy system ją zawierający niesprzeczny i o rekurencyjnym zbiorze aksjomatów, który oznaczymy skrótem AR, jest istotnie niezupełny. Dlatego właśnie TG nazywamy twierdzeniem o niezupełności AR[2]. Czasem też zdarza się, że twierdzenie to bywa nazwane twierdzeniem o nierozstrzygalności AR[3]. Jednym z celów napisania niniejszego artykułu jest próba wyjaśnienia tego nieporozumienia. Głównym celem jest zapoznanie Czytelnika ze związkiem treściowym, z którego nie wszyscy zdają sobie sprawę[4], jaki istnieje pomiędzy TG a tezą Churcha (skrót TC). Przed ich ścisłym sformułowaniem należy wyjaśnić pojęcia pomocnicze. Pierwszym jest idea arytmetyzacji składni. Sam pomysł jest bardzo prosty, lecz jego wykonanie w sposób ścisły jest dość żmudne, dlatego przedstawię jedynie samą ideę. Wiadomo, że każda liczba naturalna

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] „Osiągnięcia Kurta Gödla we współczesnej logice są wyjątkowe i monumentalne — w rzeczywistości to więcej niż monument, to punkt zwrotny, który pozostanie widoczny daleko w czasie i przestrzeni.” J. von Neumann, w New York Times, 15 marzec, 1951, s. 51, (tłum. A.O.). Chodzi tutaj o tzw. pierwsze twierdzenie Gödla o niezupełności.

[2] TG zostało dowiedzione przez Gödla dla dowolnego systemu formalnego, który posiada następujące własności: (i) jest ω–niesprzeczny, (ii) ma rekurencyjnie definiowalny zbiór aksjomatów i reguł inferencji, (iii) każda relacja rekurencyjna jest definiowalna w tym systemie. W naszych rozważaniach AR spełnia warunek drugi i trzeci, zaś pierwszy zastępujemy zwykłą niesprzecznością. Zatem chodzi o wariant TG, będący twierdzeniem Rossera.

[3] Por. na przykład A. Grzegorczyk, *Zagadnienia rozstrzygalności*, Warszawa 1957, s. 107.

[4] Artykuł niniejszy jest trzecim z serii artykułów poświęconych związkowi TC z innymi ważnymi zagadnieniami filozoficznymi. Poprzednie dwa: „Teza Churcha a Platonizm” oraz „O roli TC w dowodzie pewnego twierdzenia”, ukazały się w dwóch poprzednich numerach czasopisma „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce”.

(oprócz 0 i 1) da się przedstawić jako iloczyn pewnej ilości liczb pierwszych[5]. Liczby pierwsze tworzą „budulec”, z którego możemy, biorąc iloczyny skończone, uzyskać dowolną liczbę naturalną. Każdej zatem liczbie naturalnej przyporządkować możemy wzajemnie jednoznacznie jej rozkład na iloczyn liczb pierwszych. Gödel znalazł sposób, w jaki możemy każdemu, poprawnie zbudowanemu, wyrażeniu języka AR przyporządkować wzajemnie jednoznacznie jego numer Gödlowski, tzn. określoną liczbę naturalną[6]. Ta odpowiedniość jest bardzo ścisła, tzn. możemy, mając wyrażenie, skonstruować jego numer, ale i odwrotnie, mając jakiś numer Gödlowski, możemy skonstruować samo wyrażenie. Dotyczy to nie tylko wyrażeń języka AR, ale również skończonych ciągów wyrażeń, jak np. dowodów. Teraz drugi istotny krok: chcąc wypowiedzieć jakieś stwierdzenie metamatematyczne o jakichś wyrażeniach AR, możemy, znając ich numery Gödlowskie, mówić o tych numerach; co za tym idzie, przejść znowu z metamatematyki do AR. Powiemy w skrócie: pewne metamatematyczne zdania o AR można przełożyć na zdania arytmetyczne. Zapiszemy to tak: jeśli χ jest wyrażeniem AR, to $[\chi]$ oznacza jego numer Gödlowski[7]. Metamatematyczne zdanie: „formuła $\chi(t)$ jest wynikiem podstawienia termu t (czyli wyrażenia kategorii nazwowej), do formuły $\chi(x)$ za zmienną x”[8], da się również przetłumaczyć na formułę arytmetyczną[9]. Arytmetyczną funkcję podstawiania zapiszemy następująco: $podst([\chi(x)], [x], [t]) = [\chi(t)]$[10]. Należy podkreślić, że ta ostatnia formuła jest zdaniem zapisanym w języku AR. Da się również zapisać w AR następujące zdanie metamatematyczne: „ciąg wyrażeń x, jest dowodem wyrażenia χ”, w postaci: $Dow_{AR}([x], [\chi])$, również tutaj należy podkreślić, iż formuła ta jest zdaniem czysto arytmetycznym (oczywiście odpowiadają-

[5]Dokładne omówienie tego zagadnienia w: A. Grzegorczyk, *Zarys arytmetyki teoretycznej*, PWN, Warszawa 1971, ss. 81–83.

[6]Dla praktycznego zapoznania się z numeracją Gödla por. np. E. Nagel, J. R. Newman, *Twierdzenie Gödla*, PWN, Warszawa 1966, ss. 53–61.

[7]Możemy kodować nie tylko zdania, ale również funkcje zdaniowe, w których występują zmienne wolne.

[8]Jest to właśnie sytuacja wspomniana w poprzednim przypisie: $\chi(x)$ jest formą zdaniową jednej zmiennej wolnej x, gdzie zmienna przy kodowaniu traktowana jest czysto syntaktycznie, jako znak.

[9]Nie jest to wcale takie proste i oczywiste. W tej sprawie por. np. Nagel, Newman, op. cit., ss. 83–84. To właśnie, między innymi, dokładnie zrobił Gödel w pracy „Ueber formal unentscheindbare Setze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.”, Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 (1931), ss. 173–198; również w: M. Davies, *The Undecidable*, Raven Press, New York 1964, ss. 5–38.

[10]Jest to, jak widać, funkcja trójargumentowa, reprezentująca ją relacja będzie czteroargumentowa.

cym znaczeniu zdania metamatematycznego). O dwóch dowolnych termach x, y powiemy, że:

$Dow_{AR}(x, y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest numerem Gödla dowodu formuły o numerze Gödla y.

Wreszcie zdefiniujemy: $D_{AR}(y) \leftrightarrow \exists x Dow_{AR}(x, y)$, inaczej; formuła o numerze Gödlowskim y jest dowodliwa w AR, gdy istnieje obiekt x będący numerem Gödlowskim jej dowodu.

Zachodzi ważna własność, że jeśli dowolne zdanie χ jest dowodliwe w AR z aksjomatów, to $D_{AR}([\chi])$ jest twierdzeniem w AR.

Dla dowodu TG potrzebny jest następujący lemat:

Niech $\chi(x)$ w języku AR ma tylko jedną zmienną x. Istnieje zdanie φ takie, że

$$\varphi \leftrightarrow \chi(\underline{[\varphi]})$$

jest twierdzeniem AR[11].

Dowód: Niech $podst'(x, y, z) = podst(x, y, num(z))$[12]. Niech **podst'**[13] reprezentuje w AR funkcję *podst'*. Dla danego $\chi(x)$, niech $\theta(x)$ będzie następującą formułą

$$\forall y(\mathbf{podst'}(x, \underline{2}, x, y) \rightarrow \chi(y))$$

(przyjmujemy, że liczba 2 jest numerem Gödla zmiennej x, zaś $\underline{2}$ jest liczebnikiem (nazwą) liczby 2). Niech $m = [\theta(x)]$ oraz niech φ będzie zdaniem $\theta(\underline{m})$. Wobec powyższych ustaleń mamy:

$$\begin{aligned}
\varphi &\leftrightarrow \theta(\underline{m}) \\
&\leftrightarrow \forall y(\mathbf{podst'}(\underline{m}, \underline{2}, \underline{m}, y) \rightarrow \chi(y)) \\
&\leftrightarrow \forall y(\mathbf{podst'}(\underline{[\theta(x)]}, \underline{2}, \underline{m}, y) \rightarrow \chi(y)) \\
&\leftrightarrow \chi(\underline{[\theta(m)]}) \\
&\leftrightarrow \chi(\underline{[\varphi]}).
\end{aligned}$$

Czego należało dowieść[14].

Wstawmy do dowiedzionego lematu $\neg D_{AR}(x)$ za formułę $\chi(x)$.

Twierdzenie Gödla o niezupełności:

Jeśli w AR, o ile AR jest niesprzeczna, da się dowieść:

---

[11] Dowód ten pochodzi zasadniczo z: C. Smoryński, „The incompleteness theorems," w: *Handbook of mathematical logic*, J. Barwise (ed.), North–Holland, Amsterdam 1977, ss. 827–828. Dowód ten jednak nie jest poprawny. Uwagę tę zawdzięczam Panu Prof. R. Murawskiemu. Niniejszy dowód pochodzi z książki: R. Murawski, *Recursive functions and metamathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999.

[12] *num(y)* jest numerem Gödla liczebnika y (liczebnik to nazwa liczby).

[13] Predykat ten jest czteroargumentowy.

[14] Oczywiście jest to skrótowo zapisany ciąg równoważności.

$\varphi \leftrightarrow \neg D_{AR}([\varphi])$, to:

(i) w AR nie da się dowieść ani zdania φ;

(ii) ani (przy założeniu, że dowiedlność $D_{AR}([\varphi])$ na gruncie AR implikuje dowiedlność φ w AR) nie da się w AR dowieść $\neg\varphi$.

Dowód niewprost:[15] (i) Jeśliby φ było dowiedlne w AR, to dowiedlne byłoby $D_{AR}([\varphi])$, a to na mocy założenia twierdzenia i lematu dawałoby możliwość dowiedzenia, na gruncie AR, zdania $\neg\varphi$. A to przeczy niesprzeczności AR.

(ii) załóżmy, że dowiedlne w AR jest $\neg\varphi$, to wtedy dowiedlne byłoby $\neg\neg D_{AR}([\varphi])$, czyli również $D_{AR}([\varphi])$, a z założenia dodatkowego mielibyśmy dowiedlne w AR φ, co jest sprzeczne z założeniem niesprzeczności AR. I to kończy cały dowód.

W formie komentarza, do tego nieformalnego przedstawienia dowodu TG, należy powiedzieć, iż sam dowód jest krótki i bardzo prosty. Cały ciężar spoczywa na poprawnym zdefiniowaniu arytmetyzacji składni i stwierdzeń metamatematycznych. Jeśli to da się uzyskać i zrozumieć, to pozostała część wydaje się nawet trywialnym spostrzeżeniem[16].

Załóżmy teraz, że: TG jest fałszywe i że AR jest zupełna oraz prawdziwość TC.

Dla naszych dalszych rozważań potrzebny będzie jeszcze jeden predykat, zwany w literaturze przedmiotu predykatem Kleenego[17]. Jest to predykat pierwotnie rekurencyjny, analogiczny do predykatu Dow_{AR} Gödla. Symbolicznie zapiszemy go *T(e, n, x)*. Trójka liczb naturalnych spełnia go, czy też inaczej, orzeka się on prawdziwie o trzech liczbach naturalnych wtedy i tylko wtedy, gdy e jest numerem Gödlowskim pewnego zbioru równań[18], x jest numerem Gödlowskim derywacji, z tego zbioru równań, równania, które wyraża to, jaką wartość przyjmie funkcja f występująca

[15] Dowód również pochodzi z cytowanej pracy Smoryńskiego s. 828.

[16] Można tutaj postawić pytanie o to, czy da się dowieść TG bez zabiegu arytmetyzacji. Już wiadomo, że w pewnym sensie można, gdyż udowodniono istnienie zdań o treści arytmetycznej (nie „sztuczne” jak było ze zdaniem Gödla), które są niezależne od aksjomatów AR. Por. w tej sprawie: R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki*, UAM, Poznań 1990.

[17] Por. np. H. Rogers Jr., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw–Hill Book Company, New York 1967, s. 30.

[18] Równania te charakteryzują pewną funkcję *f*.

w wymienionych równaniach, dla argumentu n[19]. Kleene skonstruował do tego jeszcze funkcję, również pierwotnie rekurencyjną *U(x)*, która działa tak: $f(n) = U(\mu x T(e, n, x))$. Funkcja ta „wydobywa" z numeru Gödlowskiego równania x, wartość funkcji f w punkcie n. Dzięki temu dysponujemy efektywną enumeracją wszystkich jednoargumentowych częściowych funkcji rekurencyjnych: $\varphi_0(n), \varphi_1(n), ..., \varphi_e(n), ...$; gdzie $\varphi_e(n) = U(\mu x T(e, n, x))$[20]. Ponieważ w tym ciągu występują funkcje częściowe, można je efektywnie uzupełnić do funkcji całkowitych $\underline{\varphi}_0(n), \underline{\varphi}_1(n), ..., \underline{\varphi}_e(n), ...$ w sposób następujący:

$\underline{\varphi}_e(n) = U(x)$, gdy $T(e, n, x)$, lub

$\underline{\varphi}_e(n) = 0$, gdy $\forall x \neg T(e, n, x)$ jest twierdzeniem AR.

Te nowe funkcje są określone na całym zbiorze liczb naturalnych. Wobec tego, dla ustalonych e oraz n, możemy poszukiwać najmniejszej liczby x takiej, że zachodzi T(e, n, x). Jeśli taką liczbę znajdziemy, to dajemy $\underline{\varphi}_e(n) = U(x)$. Jeśli takiej liczby nie ma, co wyraża odpowiednie zdanie AR, to znajdziemy jego numer Gödlowski, i wtedy kładziemy $\underline{\varphi}_e(n) = 0$[21]. Mając taką efektywną enumerację wszystkich jednoargumentowych funkcji ogólnie rekurencyjnych możemy, używając argumentu przekątniowego Cantora, wziąć funkcję $\underline{\varphi}_n(n) + 1$. Funkcja ta nie występuje na naszej liście wszystkich jednoargumentowych funkcji ogólnie rekurencyjnych. Sama jest jednak efektywnie obliczalna. Wynikałoby z powyższych założeń, że klasa funkcji efektywnie obliczalnych jest obszerniejsza niż klasa wszystkich funkcji ogólnie rekurencyjnych. Jest to sprzeczne z TC, która mówi co następuje:

(TC) Klasa funkcji określonych w zbiorze liczb naturalnych i obliczalnych w sensie intuicyjnym, pokrywa się zakresowo z klasą wszystkich funkcji ogólnie rekurencyjnych.

Całe powyższe rozumowanie doprowadziło nas do uzasadnienia prawdziwości następującego wynikania:

---

[19] W opisie za pomocą maszyn Turinga predykat ten ma heurystyczne znaczenie: maszyna Turinga o numerze Gödla e i mając na wejściu n, wykonuje obliczanie o numerze Gödlowskim x. Por. A. A. Fraenkel, Y. Bar–Hillel, A. Levy, *Foundations of set theory*, North–Holland, Amsterdam 1973, ss. 260–261. Predykat ten został opisany przez Kleenego w pracy: S. C. Kleene, „General recursive functions of natural numbers", w: M. Davis, *The Undecidable*, Raven Press, New York 1964, ss. 237–253.

[20] Argument ten pochodzi z pracy S. C. Kleene, *Reflections on Church's Thesis*, Notre Dame Journal of Formal Logic, 28 (1987), ss. 490–498.

[21] Dokładnie owa procedura polega na podwójnym sprawdzaniu po pierwsze dla kolejnego x sprawdzamy, czy spełnia predykat T, jeśli ów x nie spełnia formuły, to sprawdzamy, czy jest może numerem Gödlowskim formuły wyrażającej fakt, iż takie x po prostu nie istnieje.

(TG jest fałszywe) ⇒ (TC jest fałszywa),

lub równoważnie[22]:

(TC jest prawdziwa) ⇒ (TG jest prawdziwe)[23].

Rzecz cała wydaje się dość interesująca z filozoficznego punktu widzenia. Jakiego to rodzaju zależność zachodzi pomiędzy TG a TC? Jest to z pewnością zależność logiczna. Znaczy to, że prawdziwość TC pociąga za sobą prawdziwość TG. Jest to również jakoś zależność „treściowa". Znaczyć by to mogło, że treść TG zawiera się w treści TC. Do wysłowienia zarówno TC jak i TG potrzebujemy takich pojęć jak: liczby naturalne, funkcje, obliczalność[24]. Nieprzypadkowo chyba to Gödel, dla potrzeb swego dowodu, wysłowił pojęcie funkcji rekurencyjnych. Interesujące również wydaje się pytanie o prawdziwość wynikania odwrotnego do ostatniego z występujących powyżej[25].

---

[22]Pod warunkiem, że takie wynikanie ma własność kontrapozycji (mocnej).

[23]Zgodnie z TG niezupełny jest każdy system AR, ω–niesprzeczny o obliczalnej aksjomatyce. Taki też system rozważał Kleene w artykule „Reflections on Church's Thesis". Ta implikacja jest możliwa do przyjęcia dzięki mocnemu prawu kontrapozycji, ważnemu w logice klasycznej, ale nietautologicznemu w logice np. intuicjonistycznej.

[24]W przypadku TG nie występują te pojęcia explicite lecz implicite, tzn. zawiera je termin AR.

[25]Mogłoby to oznaczać, że założenie prawdziwości TG, a co za tym idzie istotnej niezupełności AR, dałoby wystarczającą podstawę do uznania prawdziwości TC. Inaczej, że treść TG „zawiera" w sobie treść TC, w takim samym sensie jak przeciwne „zawieranie" się treści miało zostać wykazane w powyższym artykule.